

На правах рукописи



Круссер Анастасия Игоревна

**АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПЛАСТИН НА
ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ПОМОЩИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ
МОДЕЛЕЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

Специальность 1.1.8 Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ВГТУ»).

Научный руководитель:

Шитикова Марина Вячеславовна

доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «ВГТУ»,
международный научный центр по
фундаментальным исследованиям в
области естественных и строительных
наук имени Заслуженного деятеля науки
РФ профессора Россихина Ю.А.,
руководитель

Официальные оппоненты:

Крысько Антон Вадимович

доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский
государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.»,
профессор кафедры прикладной
математики и системного анализа

Пшеничнов Сергей Геннадиевич

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО
«Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова»,
ведущий научный сотрудник лаборатории
динамических испытаний

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Самарский государственный
технический университет» (г. Самара)

Защита состоится «27» июня 2023 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 99.2.059.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 300012, Тульская область, г. Тула, проспект Ленина, д. 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» (https://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Krusser_A_I/).

Автореферат разослан «21» апреля 2023 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета

Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований. Возрастающий интерес к изучению динамического поведения пластин, опирающихся на вязкоупругое основание, обусловлен широким спектром применения решений данного класса задач для моделирования многих реальных инженерных приложений. Например, конструкция дорожного полотна или взлетно-посадочной полосы аэродромов часто состоит из железобетонных плит, что моделируется в виде пластины, лежащей на вязкоупругом основании, которое обеспечивает внешнее демпфирование и оказывает значительное влияние на динамические прогибы системы.

При нелинейных колебаниях конструкций может возникнуть явление внутреннего резонанса, которое проявляется в перекачке энергии между модами колебаний с близкими значениями собственных частот. Устранение данного типа резонанса возможно только за счет изменения геометрических размеров конструкции или граничных условий опирания на стадии проектирования, в отличие от внешнего резонанса, появление которого можно избежать путем изменения частоты возмущающей гармонической силы или скорости нагрузки на стадии эксплуатации. Наложение внутреннего и внешнего резонансов в конструкции может привести к катастрофическим последствиям.

В инженерной практике часто возникает задача определения различных динамических параметров пластинчатых конструкций на вязкоупругом основании в результате воздействия подвижных нагрузок, таких как, например, давление шин автомобилей или шасси самолетов. Движение современных автомобилей с высокими скоростями или самолётов при взлёте и посадке может приводить к возрастанию амплитуды колебаний пластинки за счет появления явления внешнего резонанса.

Для описания демпфирующих свойств вязкоупругого основания в динамических контактных задачах твердых тел используется несколько реологических моделей, среди которых модель Кельвина-Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела. Как следует из экспериментальных данных, модель стандартного линейного твердого тела более пригодна для изучения физико-механических свойств вязкоупругих оснований, поскольку она способна описать и свойства ползучести, и свойства релаксации вязкоупругих материалов (грунтов), в то время как модель Кельвина-Фойгта непригодна для описания релаксации материалов, а модель Максвелла не описывает явление ползучести.

В настоящее время широкое распространение получили модели вязкоупругих оснований типа Фусса-Винклера или Пастернака с дробной производной, поскольку дробное исчисление имеет важное значение при решении динамических контактных задач механики деформируемого твердого тела. Данной тематике посвящено большое количество научных трудов, обзор которых представлен в работах Россихина Ю.А. и Шитиковой М.В. В механике грунтов модели с дробной производной продемонстрировали преимущества при описании наследственного поведения с длительной памятью.

Степень разработанности темы исследования. Развитию моделей вязкоупругих материалов посвящены труды Ржаницына А.Р., Ишлинского А.Ю., Работнова Ю.Н., Сорокина Е.С., Максвелла Дж.К., Кельвина, Фойгта В., Зинера К., Джеффриса Г.

Одними из первых исследователей, которые построили модели вязкоупругости с дробными производными, были Мешков С.И., Шермергор Т.Д., Россиин Ю.А., Caputo M., Gemant A., Watanabe S.W. и другие ученые. Два пути развития теории линейной

вязкоупругости на основе операторов дробного порядка описаны в ретроспективной статье Россихина Ю.А.

Различные модели упругих и вязкоупругих оснований были рассмотрены в работах Фусса Н.И., Пастернака П.Л., Филоненко – Бородича М.М., Власова В.З., Winkler E., Zimmermann H., Hetényi M., Reissner E. и других исследователей.

Динамические контактные задачи пластин на вязкоупругом основании анализировали в своих трудах Россихин Ю.А., Шитикова М.В., Dumir P., Amalibi M., Zhang C.C., Zhu H.H., Younesian D. и другие авторы.

Колебания балок и пластин при воздействии подвижных нагрузок изучали следующие авторы: Ерофеев Н.И., Fryba L., Praharaj R.K., Dang-Trung H., Hien T.D. и другие отечественные и зарубежные ученые.

Целью диссертационной работы является анализ нелинейных колебаний упругой пластины на вязкоупругом основании под действием внешних сил в условиях сочетания внешнего и внутреннего резонансов с учетом демпфирующих свойств окружающей среды и основания, которые описываются реологическими моделями с дробными производными.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

- постановка задачи о нелинейных колебаниях упругой пластины на вязкоупругом основании при воздействии гармонической и осциллирующей нагрузок при наличии демпфирования среды и основания, которое описывается моделями вязкоупругости с дробными производными;
- получение численно-аналитического решения систем разрешающих дифференциальных уравнений для определения амплитуд и фаз нелинейных колебаний с использованием обобщенного метода многих временных масштабов и метода Рунге-Кутты четвертого порядка;
- сравнительный анализ безразмерных амплитуд колебаний системы для различных моделей вязкоупругих оснований;
- изучение влияния параметров дробности окружающей среды и вязкоупругого основания на процесс перекачки энергии, происходящий при нелинейных колебаниях пластинок на вязкоупругом основании, находящихся в условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов;
- анализ влияния граничных условий опирания пластинки, а также амплитуды и порядка вязкости внешней нагрузки на характер нелинейных колебаний пластины.

Научная новизна работы заключается в том, что

- при помощи обобщенного метода многих временных масштабов получены системы дифференциальных уравнений для определения амплитуд и фаз нелинейных вынужденных колебаний шарнирно опертой по контуру пластинки для случаев воздействия гармонической и осциллирующей нагрузок, и выполнено их численное исследование при помощи алгоритма Рунге-Кутты четвертого порядка;
- проанализировано влияние граничных условий опирания на амплитудно-частотные характеристики нелинейных колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании;
- представлен сравнительный анализ безразмерных амплитуд колебаний системы для различных реологических моделей вязкоупругого основания;
- изучено влияние параметров дробности вязкоупругого основания и среды, а также рассмотрено влияние амплитуды и порядка вязкости внешнего воздействия на изменение амплитуд и фаз нелинейных колебаний пластины.

Теоретическая и практическая значимость работы. Задача о нелинейных колебаниях пластинки на вязкоупругом основании может найти много инженерных приложений, таких как взаимодействие самолета и взлетно-посадочной полосы или автомобиля и дорожного покрытия, проектирование фундаментной плиты на грунтовом основании, динамика системы вертолетных площадок, палубы кораблей (особенно авианосцев), система железнодорожных путей и т.д. В связи с этим особую важность имеет изучение явления внутреннего резонанса в подобных конструкциях, когда частоты двух собственных мод колебаний близки по значению друг к другу.

В диссертационной работе разработан алгоритм решения уравнений движения системы «пластина+вязкоупругое основание», который реализован в виде программного комплекса, зарегистрированного в государственном реестре программ для ЭВМ. Данная программа позволяет построить решение при вычислении амплитуд и фаз нелинейных вынужденных колебаний пластины на вязкоупругом основании, а также определить перемещения пластины при различных геометрических параметрах конструкции и реологических параметрах среды и основания.

При воздействии подвижной нагрузки представленная методика расчета позволит избежать наложения внешнего резонанса на внутренний, поскольку за счет изменения скорости прохождения нагрузки или частоты возмущающей гармонической силы можно регулировать явление возникновения внешнего резонанса, не допуская его сочетания с внутренним резонансом, что может привести к необратимым разрушениям конструкции.

Положения, выносимые на защиту:

- постановка задачи о нелинейных свободных и вынужденных колебаниях упругой пластины на вязкоупругом основании Фусса-Винклера или Пастернака, демпфирующие свойства которого описываются различными реологическими моделями с дробной производной;
- алгоритм расчета нелинейных упругих прямоугольных пластин на вязкоупругом основании для различных типов граничных условий опирания;
- решение задачи о вынужденных нелинейных колебаниях пластинки на вязкоупругом основании для случая воздействия подвижной гармонической силы, когда система находится в условиях внешнего и внутреннего резонансов;
- анализ результатов численных исследований системы нелинейных уравнений для определения амплитуд и фаз упругой прямоугольной пластинки на вязкоупругом основании для случая внутреннего резонанса при свободных и вынужденных колебаниях;
- решение задачи о вынужденных нелинейных колебаниях пластины на вязкоупругом основании для случая воздействия подвижной подрессоренной нагрузки, когда демпфирующие свойства осциллятора описываются моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной по времени.

Степень достоверности базируется на корректной математической постановке задач. Полученные в работе результаты согласуются с общими физическими представлениями. Правильность полученных результатов определяется корректностью математических выкладок и сопоставлением с известными результатами других авторов.

Реализация работы. Разработан программный комплекс численных исследований нелинейных колебаний прямоугольных пластинок на вязкоупругом основании с использованием операторов дробного порядка и получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022668236.

Апробация работы. Основные положения работы докладывались и обсуждались: на XLIV International Conference “Advanced Problems in Mechanics” (Санкт-Петербург, 2016); 24th International Congress on Sound and Vibration (London, 2017); на юбилейной XXX Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (Москва, 2018); на XXXI Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (Москва, 2019); на XI International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2020 (Athens, 2020); на 2d International Nonlinear Dynamics Conference, NODYCON 2021 (Rome, 2021); на International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety, ICAATS 2021 (Сочи, 2021); на XV Международной научно-технической конференции «Актуальные вопросы архитектуры и строительства» (Новосибирск, 2022); на 15th International Conference on Vibration Problems, ICOVP 2023 (Doha, 2023).

Диссертация в целом докладывалась и обсуждалась на научных семинарах Международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук Воронежского государственного технического университета (руководитель центра: д-р ф.-м. наук, профессор Шитикова М.В.), 2020-2023 гг., на научном семинаре кафедры «Математическая теория упругости и биомеханики» Саратовского государственного университета (руководитель семинара: д-р ф.-м. наук, профессор Коссович Л.Ю.), 2022г., и на научном семинаре кафедры «Математический и прикладной анализ» Воронежского государственного университета (руководитель семинара: д-р ф.-м. наук, профессор Шашкин А.И.), 2023г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, в том числе 9 статей в изданиях, индексируемых в научных базах данных Scopus и Web of Science, из которых 1 статья в издании, рекомендуемом ВАК РФ, и 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения, списка литературы и 3-х приложений. Полный объем работы составляет 159 страниц, включает в себя 46 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 303 источника, в том числе 241 зарубежных.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность исследований по рассматриваемой теме, приведены общая характеристика диссертационной работы и основные положения, которые автор выносит на защиту.

В первой главе приводится обзор существующей литературы, посвященной колебаниям пластинок на вязкоупругом основании, демпфирующие свойства которого описываются при помощи различных реологических моделей. Представлены классификация и краткий исторический обзор классических моделей вязкоупругости, а также моделей вязкоупругих материалов с использованием дробной производной. Изучены модели вязкоупругих оснований и примеры их применения для описания свойств различных типов грунтов. Рассмотрены экспериментальные и теоретические исследования свободных и вынужденных колебаний пластинок на вязкоупругом основании при воздействии различных видов внешних сил.

Вторая глава посвящена анализу нелинейных вынужденных колебаний шарнирно опертой по контуру упругой пластинки на вязкоупругом основании, колеблющейся в вязкоупругой окружающей среде под действием поперечной нагрузки $q = q(x, y, t)$ (Рис.1).

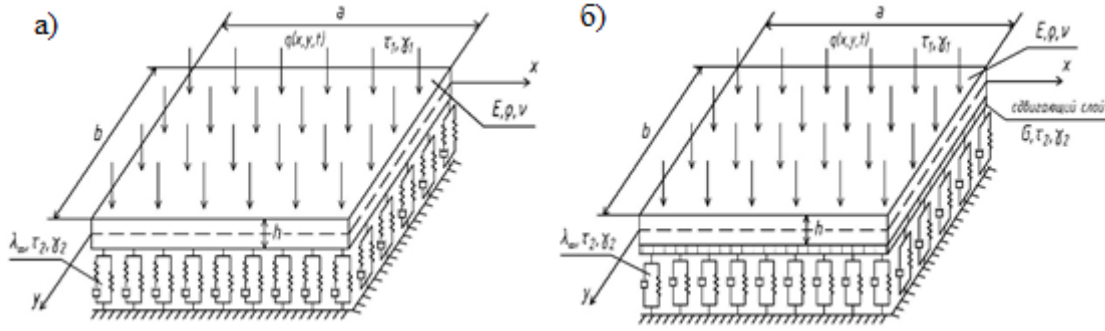


Рисунок 1 - Схема прямоугольной пластинки на вязкоупругом основании: а) модель Фусса-Винклера; б) модель Пастернака

Уравнение движения пластинки фон Кармана, колеблющейся в вязкоупругой окружающей среде под действием гармонической нагрузки, относительно поперечного прогиба $w = w(x, y, t)$ имеет вид:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = q - F_1 - F_2, \quad (1)$$

где h – толщина пластинки, $\nabla^4 = \partial^4 / \partial x^4 + 2\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 / \partial y^4$ – бигармонический оператор, $\phi(x, y, t)$ – функция напряжений Эйри, которая связана с прогибом пластинки соотношением

$$\nabla^4 \phi = Eh \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (2)$$

$D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость, ν , E и ρ – коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность материала пластинки, $q = F \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \cos \Omega_F t$ – внешняя нагрузка, F и Ω_F – амплитуда и частота внешней гармонической силы, $\delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ – дельта-функция Дирака, $F_1 = \alpha_1 D^{\gamma_1} w$ – сила сопротивления вязкоупругой среды, свойства которой описываются при помощи модели Кельвина-Фойгта с дробной производной Римана-Лиувилля порядка γ ($0 < \gamma \leq 1$), когда $\gamma = \gamma_1$

$$D^\gamma x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t - t') dt'}{\Gamma(1 - \gamma) t^{1-\gamma}}, \quad (3)$$

$\Gamma(1 - \gamma)$ – гамма-функция, τ_1 и $\alpha_1 = E_0 \tau_1^{\gamma_1}$ – время ретардации и коэффициент демпфирования вязкоупругой среды, E_0 – релаксированное значение модуля упругости.

Реакция вязкоупругого основания F_2 в уравнении (1) описывается

(1) либо при помощи модели Фусса-Винклера $F_2 = \tilde{\lambda} w$,

(2) либо при помощи модели Пастернака $F_2 = \tilde{\lambda} w - G \tau_2^{\gamma_2} D_{0+}^{\gamma_2} \nabla^2 w$,

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа, G – модуль сдвига для модели Пастернака.

Также предположим, что оператор податливости вязкоупругого основания $\tilde{\lambda}$ описывается либо моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной, либо моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной Римана-Лиувилля D_{0+}^γ

(3), когда $\gamma = \gamma_2$ (Рис.1):

$$\tilde{\lambda} = \lambda_0 (1 + \tau_2^\gamma D^{\gamma_2}), \quad (4)$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda_\infty \left[1 - \nu_\varepsilon \frac{1}{1 + \tau_2^\gamma D_{0+}^{\gamma_2}} \right], \quad (5)$$

где λ_0 и λ_∞ - релаксированное и нерелаксированное значения коэффициента податливости основания, $\nu_\varepsilon = \Delta\lambda\lambda_\infty^{-1}$, $\Delta\lambda = \lambda_\infty - \lambda_0$ - величина, характеризующая уменьшение коэффициента податливости от его нерелаксированного значения до релаксированного, τ_2 - время ретардации для вязкоупругого основания по модели Кельвина-Фойгта и время релаксации вязкоупругого основания по модели стандартного линейного твердого тела.

В процессе нелинейных колебаний пластинки на вязкоупругом основании может возникнуть явление внутреннего резонанса, в связи с этим предположим, что в процессе колебаний доминируют две собственные моды. Тогда выражение для прогиба пластинки можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= x_1(t)W_{m_1n_1}(x, y) + x_2(t)W_{m_2n_2}(x, y) = \\ &= x_1(t)\sin\frac{\pi m_1 x}{a}\sin\frac{\pi n_1 y}{b} + x_2(t)\sin\frac{\pi m_2 x}{a}\sin\frac{\pi n_2 y}{b}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $x_i(t)$ ($i=1,2$) – обобщенные перемещения, соответствующие модам колебаний с номерами m_1n_1 и m_2n_2 соответственно, и $W_{m_in_i}(x, y)$ – собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Подставляя предполагаемое двучленное разложение для функции прогиба пластины (6) и функцию напряжений (2) в уравнение движения (1), а также учитывая фильтрующее свойство дельта-функции и свойство ортогональности собственных функций и интегрируя на отрезках $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$ с учетом граничных условий, получим следующие системы нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных перемещений, записанные в безразмерном виде:

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (\Omega_1^2 + \lambda_\infty)x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + E_0 \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_1 - \lambda_\infty \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 - \\ - 4F \sin \pi m_1 x_0 \sin \pi n_1 y_0 \cos \Omega_F t = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + (\Omega_2^2 + \lambda_\infty)x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + E_0 \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_2 - \lambda_\infty \nu_\varepsilon \mathfrak{E}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 - \\ - 4F \sin \pi m_2 x_0 \sin \pi n_2 y_0 \cos \Omega_F t = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (\Omega_1^2 + \lambda_\infty)x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + E_0 \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_1 + \lambda_0 \tau_2^{\gamma_2} D^{\gamma_2} x_1 \\ + G \tau_2^{\gamma_2} \pi^2 (\xi^2 m_1^2 + n_1^2) D_{0+}^{\gamma_2} x_1 - 4F \sin \pi m_1 x_0 \sin \pi n_1 y_0 \cos \Omega_F t = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + (\Omega_2^2 + \lambda_\infty)x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + E_0 \tau_1^{\gamma_1} D^{\gamma_1} x_2 + \lambda_0 \tau_2^{\gamma_2} D^{\gamma_2} x_2 \\ + G \tau_2^{\gamma_2} \pi^2 (\xi^2 m_2^2 + n_2^2) D_{0+}^{\gamma_2} x_2 - 4F \sin \pi m_2 x_0 \sin \pi n_2 y_0 \cos \Omega_F t = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Omega_i = (\xi^2 m_i^2 + n_i^2) / \xi$ – собственные частоты линейных колебаний пластинки, $\xi = \frac{a}{b}$, $\mathfrak{A}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) = (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_{0+}^{\gamma_2})^{-1}$ – безразмерный дробный оператор Работнова Ю.Н, α_i – коэффициенты при нелинейных членах уравнений, зависящие от граничных условий.

Метод решения. Разрешающие уравнения (7)-(8) и (9)-(10) с операторами дробного порядка можно решить с помощью метода разложения дробного оператора, который является обобщением метода многих временных масштабов, впервые предложенного для разложения дробной производной Россихиным Ю.А. и Шитиковой М.В. в 1997г.

Рассмотрим сначала случай мягкого внешнего воздействия и представим слагаемые с силой в виде

$$\varepsilon^3 f_i = F \sin \pi m_i x_0 \sin \pi n_i y_0 \quad (i=1, 2), \quad (11)$$

где ε – малый параметр, f_i – конечные величины.

Предположим также, что коэффициенты при силах демпфирования среды и основания являются малыми величинами порядка ε^2 , т.е. $\varepsilon^2 \mu_1 = E_0 \tau_1^{\gamma_1}$, $\varepsilon^2 \mu_2 = \lambda_0 \tau_2^{\gamma_2}$ для модели Кельвина-Фойгта или $\varepsilon^2 \mu_2 = \lambda_\infty \nu_\varepsilon$ для модели стандартного линейного твердого тела и $\varepsilon^2 \mu_3 = G \tau_2^{\gamma_2} \pi^2 (\xi^2 m_i^2 + n_i^2)$, где μ_i – конечные величины. Заметим, что принятый порядок малости для внешних сил и сил демпфирования среды и основания согласуется с представлениями о внешнем резонансе; а именно, ожидается, что в системе со слабым демпфированием возбуждение с малой амплитудой вызывает отклик с относительно большой амплитудой.

Обобщенные перемещения в уравнениях (7)-(8) и (9)-(10) можно записать в виде разложения по новым временным масштабам в следующем виде:

$$x_i(t) = \varepsilon X_{i1}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 X_{i3}(T_0, T_2) + \dots \quad (i=1, 2), \quad (12)$$

где $T_0 = t$ – быстрое время, характеризующее движения с собственными частотами линейных колебаний, и $T_2 = \varepsilon^2 t$ – медленное время, характеризующее модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

При решении уравнений обобщенным методом многих временных масштабов, производные по времени первого, второго и дробного порядков раскладываются в ряд по малому параметру в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + \dots, \quad (13)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^\gamma = (D_0 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^\gamma = D_0^\gamma + \varepsilon^2 \gamma D_0^{\gamma-1} D_2 + \dots, \quad (14)$$

где $D_n = \partial / \partial T_n$.

Безразмерный дробный оператор Ю.Н. Работнова также можно разложить в ряд по малому параметру, в результате чего получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_\gamma^* (\tau^\gamma) &= \frac{1}{1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma} = (1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma)^{-1} = \left[1 + \tau^\gamma (D_0^\gamma + \varepsilon^2 \gamma D_0^{\gamma-1} D_2) \right]^{-1} = \\ &= (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-1} - \varepsilon^2 (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-2} \tau^\gamma \gamma D_0^{\gamma-1} D_2 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

После подстановки разложения (12) с учетом соотношений (13)-(15) в уравнения (7)-(8) и (9)-(10) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε к нулю, получим следующие системы уравнений:

порядка ε

$$D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = 0, \quad (16)$$

$$D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = 0, \quad (17)$$

порядка ε^3

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

$$D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = -2D_0 D_2 X_{11} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{11} - \alpha_1 X_{11}^3 - \alpha_2 X_{11} X_{21}^2 + 4f_1 \cos(\Omega_F T_0), \quad (18)$$

$$D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = -2D_0 D_2 X_{21} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{21} - \alpha_3 X_{21}^3 - \alpha_4 X_{21} X_{11}^2 + 4f_2 \cos(\Omega_F T_0), \quad (19)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта

$$D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = -2D_0 D_2 X_{11} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} + \mu_2 D_0^{\gamma_2} + \mu_3 D_0^{\gamma_2}) X_{11} - \alpha_1 X_{11}^3 - \alpha_2 X_{11} X_{21}^2 + 4f_1 \cos(\Omega_F T_0), \quad (20)$$

$$D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = -2D_0 D_2 X_{21} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} + \mu_2 D_0^{\gamma_2} + \mu_3 D_0^{\gamma_2}) X_{21} - \alpha_3 X_{21}^3 - \alpha_4 X_{21} X_{11}^2 + 4f_2 \cos(\Omega_F T_0), \quad (21)$$

где ω_1 и ω_2 – безразмерные частоты колебаний механической системы «пластинка + вязкоупругое основание»; $\omega_i^2 = \Omega_i^2 + \lambda_0$ для модели Кельвина-Фойгта и $\omega_i^2 = \Omega_i^2 + \lambda_\infty$ для модели стандартного линейного твердого тела.

Решение уравнений (16) и (17) имеет вид

$$X_{j1} = A_j(T_2) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_2) \exp(-i\omega_j T_0), \quad (22)$$

где $A_j(T_2)$ ($j=1,2$) – неизвестные комплексные функции и $\bar{A}_j(T_2)$ – комплексно-сопряжённые функции с $A_j(T_2)$.

После подстановки решения (22) в уравнения на шаге ε^3 , были получены выражения, анализ которых показал, что в данном случае возможно возникновение внутреннего резонанса один-к-одному $\omega_1 = \omega_2 + \varepsilon^2 \sigma_1$, когда какие-либо две частоты колебаний близки друг к другу, в сочетании с внешним резонансом $\Omega_F = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2$, где σ_i – параметры «расстройки» между значениями частот.

Исключая вековые члены из полученных выражений, записывая функции A_1 и A_2 в полярной форме $A_i(T_2) = a_i(T_2) e^{i\varphi_i(T_2)}$, где $a_i(T_2)$ и $\varphi_i(T_2)$ – функции амплитуд и фаз нелинейных колебаний, а также разделяя мнимые и действительные части уравнений, приходим к следующей системе уравнений:

$$(a_1^2)^{\cdot} + s_1 a_1^2 = -\omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta - 2f_1 \omega_1^{-1} a_1 \sin \beta_1, \quad (23)$$

$$(a_2^2)^{\cdot} + s_2 a_2^2 = \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta - 2f_2 \omega_2^{-1} a_2 \sin \beta_2, \quad (24)$$

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{3}{2}\alpha_1\omega_1^{-1}a_1^2 + \alpha_2\omega_1^{-1}a_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\omega_1^{-1}a_2^2 \cos \delta - f_1(\omega_1 a_1)^{-1} \cos \beta_1, \quad (25)$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{3}{2}\alpha_3\omega_2^{-1}a_2^2 + \alpha_4\omega_2^{-1}a_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_4\omega_2^{-1}a_1^2 \cos \delta - f_2(\omega_2 a_2)^{-1} \cos \beta_2 - \sigma_1, \quad (26)$$

где $\delta = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$ - сдвиг фаз колебаний, $\beta_i = \varphi_i - \sigma_2 T_2$, а коэффициенты s_i и λ_i в уравнениях (23)-(26) имеют вид:

(1) для основания Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

$$s_i = \mu_i \omega_i^{\gamma_i-1} \sin \psi_1 + \mu_2 \omega_i^{-1} R_i \sin \Phi_i, \quad \lambda_i = \mu_i \omega_i^{\gamma_i-1} \cos \psi_1 - \mu_2 \omega_i^{-1} R_i \cos \Phi_i, \\ \psi_j = \frac{1}{2} \pi \gamma_j \quad (j=1,2), \quad R_i = \sqrt{1 + 2(\tau_2 \omega_i)^{\gamma_2} \cos \psi_2 + (\tau_2 \omega_i)^{2\gamma_2}}, \quad \tan \Phi_i = \frac{(\tau_2 \omega_i)^{\gamma_2} \sin \psi_2}{1 + (\tau_2 \omega_i)^{\gamma_2} \cos \psi_2}. \quad (27)$$

(2) для основания Пастернака по модели Кельвина-Фойгта

$$s_i = \mu_i \omega_i^{\gamma_i-1} \sin \psi_1 + \mu_2 \omega_i^{\gamma_2-1} \sin \psi_2 + \mu_3 \omega_i^{\gamma_2-1} \sin \psi_2, \\ \lambda_i = \mu_i \omega_i^{\gamma_i-1} \cos \psi_1 + \mu_2 \omega_i^{\gamma_2-1} \cos \psi_2 + \mu_3 \omega_i^{\gamma_2-1} \cos \psi_2. \quad (28)$$

Из соотношений (23)-(26) следует, что для всех случаев вязкоупругого основания получены одни и те же определяющие уравнения с точностью до коэффициентов (27) и (28) для различных моделей. Заметим, что коэффициенты затухания s_i в полученных уравнениях зависят от собственных частот линейных колебаний ω_i и реологических параметров основания и среды. При больших временах релаксации материала основания $\tau_2 \rightarrow \infty$, $\Phi_i = \psi_2$ и $R_i = (\tau_2 \omega_i)^{\gamma_2}$, и коэффициенты s_i и λ_i для модели стандартного линейного твердого тела (27) совпадают с коэффициентами для модели Кельвина-Фойгта.

Приближенное аналитическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (23)-(26) можно получить при помощи метода вариаций произвольных постоянных. Для подтверждения полученных результатов при решении также использовался численный метод Рунге-Кутты четвертого порядка, на основе которого был разработан и зарегистрирован программный комплекс для ЭВМ. Из графиков на Рис. 2 следует качественное сходство характера поведения амплитуд колебаний, полученных при помощи двух методов для различных значений параметров дробности. В дальнейшем для численных исследований будет использоваться метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

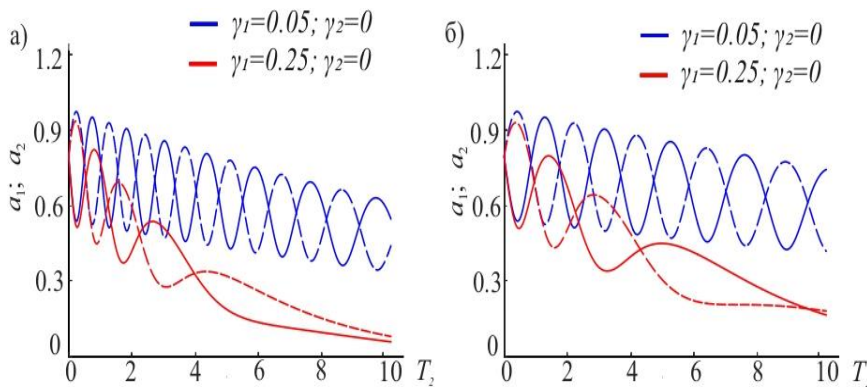


Рисунок 2 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний пластины от времени T_2 для основания Фусса-Винклера: а) метод Рунге-Кутты четвертого порядка; б) метод вариации произвольной постоянной; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия

На рисунках 3 и 4 представлены результаты численных расчетов для квадратной пластины с собственными частотами $\Omega_1 = \Omega_2 = 10$ при $m_1 = n_2 = 1, m_2 = n_1 = 3$ для различных моделей вязкоупругого основания, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

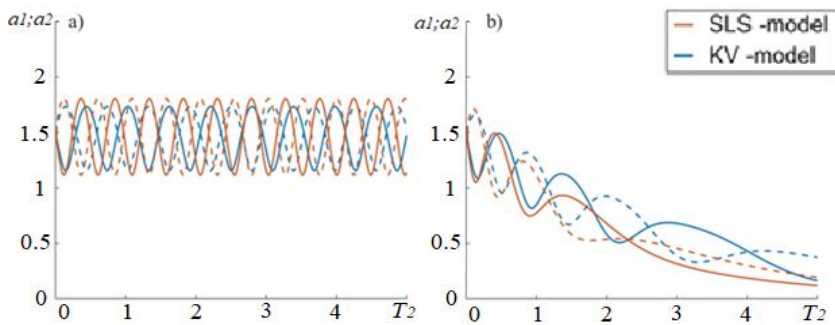


Рисунок 3 - Сравнение моделей Кельвина-Фойгта и стандартного линейного твердого тела: свободные колебания при а) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и б) $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.4$; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

На Рис. 3а хорошо видны следующие отличия: период колебаний для модели Кельвина-Фойгта больше, чем у модели стандартного линейного твердого тела, но, в свою очередь, диапазон изменения амплитуды у последней модели выше, что следует учитывать при расчете конструкций. Из Рис. 3б видно, что затухание колебаний по модели стандартного линейного твердого тела происходит быстрее, чем по модели Кельвина-Фойгта, а значит, чем выше вязкость среды, тем правильнее использовать модель Кельвина-Фойгта в расчетах конструкций, так как значения амплитуд колебаний больше.

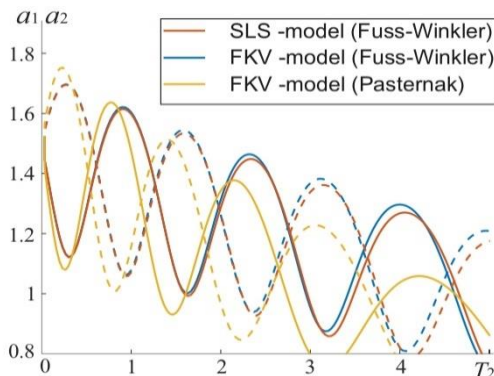


Рисунок 4 – Сравнение моделей Фусса-Винклера и Пастернака, где a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

Сравнительный анализ моделей вязкоупругого основания Фусса-Винклера и Пастернака представлен на Рис. 4 для свободных затухающих колебаний пластинки при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$. Из Рис. 4 видно, что все модели практически эквивалентны, но амплитуды для моделей основания Фусса-Винклера затухают во времени медленнее, чем амплитуды для модели основания Пастернака, поэтому представляют больший интерес для дальнейших исследований.

На Рис. 5 представлены временные зависимости безразмерных перемещений X_i шарнирно опертой пластины, и показано их уменьшение с увеличением параметров дробности среды и вязкоупругого основания.

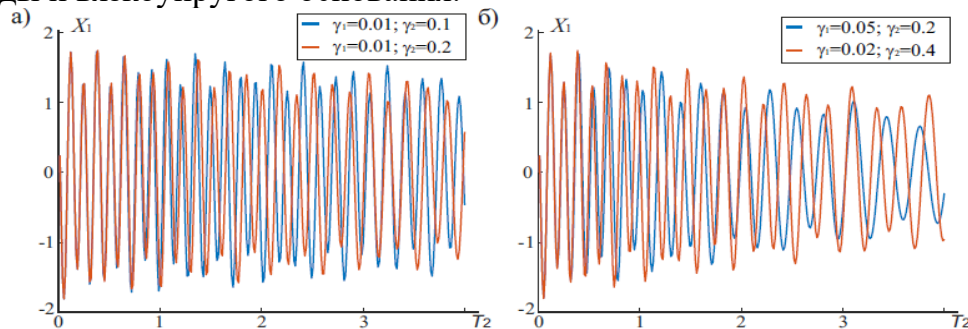


Рисунок 5 – Временная зависимость безразмерных перемещений пластинки на основании Фусса-Винклера по модели стандартного линейного твердого тела

Влияние граничных условий опирания пластины. В диссертационной работе были рассмотрены три типа граничных условий опирания пластины: шарнирное опирание по контуру (SSSS); защемление всех граней по контуру (CCCC); две противоположные грани защемлены и две другие шарнирно оперты (CSCS). Для каждого из типов граничных условий записаны значения собственных функций и собственных частот линейных колебаний пластины, приведенные в Таблице 1.

Таблица 1 - Собственные функции и собственные частоты линейных колебаний пластины для различных типов граничных условий

Тип ГУ	$W_{m,n_j}(x,y)$	Ω_i^2
SSSS	$\sin \frac{\pi m_i x}{a} \sin \frac{\pi n_i y}{b}$	$\Omega_i^2 = \frac{(\xi^2 m_i^2 + n_i^2)^2}{\xi^2}$
CCCC	$(1 - \cos \frac{2\pi m_i x}{a})(1 - \cos \frac{2\pi n_i y}{b})$	$\Omega_i^2 = \frac{16}{9\xi^2} (3\xi^4 m_i^4 + 2\xi^2 m_i^2 n_i^2 + 3n_i^4)$
CSCS	$(1 - \cos \frac{2\pi m_i x}{a}) \sin \frac{\pi n_i y}{b}$	$\Omega_i^2 = \frac{4}{3\xi^2} (4\xi^4 m_i^4 + 2\xi^2 m_i^2 n_i^2 + 0.75n_i^4)$

После выполнения той же последовательности преобразований, что и для шарнирно-опертой по контуру пластины, показано, что полученная система разрешающих уравнений (23)-(26) для определения амплитуд и фаз нелинейных колебаний пластинки является универсальной для различных типов граничных условий, для каждого из которых вычисляются отдельно лишь коэффициенты α_i и собственные частоты колебаний механической системы ω_1 и ω_2 .

В качестве численного примера на Рис. 6 представлен сравнительный анализ амплитуд вынужденных колебаний для двух типов граничных условий пластины: жестко защемленной по контуру (CCCC) и шарнирно опертой по контуру (SSSS). Из графиков следует, что колебания пластины, жестко защемленной по контуру, происходят с меньшей амплитудой и большей частотой относительно шарнирно опертой пластины.

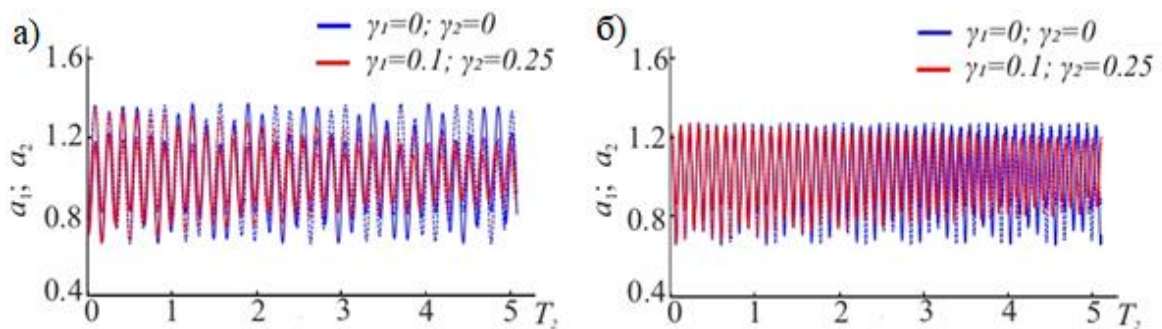


Рисунок 6 – Сравнительный анализ безразмерных амплитуд нелинейных вынужденных колебаний пластины для двух типов граничных условий: а) SSSS; б) CCCC; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия

Случай жесткого воздействия внешней силы. Когда частота внешней силы Ω_F отлична от ω_i , эффект от возбуждения будет мал, если его амплитуда не велика. В связи с этим рассмотрим случай «жесткого» воздействия внешней силы, когда слагаемые от внешней нагрузки в уравнениях (7)-(8) имеют величину порядка ε $f_i = F \sin(\pi m_i x_0 / a) \sin(\pi n_i y_0 / b)$ ($i = 1, 2$).

В данном случае были получены следующие системы уравнений различных порядков:

порядка ε

$$D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = 4 f_1 \cos(\Omega_F T_0), \quad (29)$$

$$D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = 4 f_2 \cos(\Omega_F T_0), \quad (30)$$

порядка ε^3

$$D_0^2 X_{13} + \omega_1^2 X_{13} = -2D_0 D_2 X_{11} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{11} - \alpha_1 X_{11}^3 - \alpha_2 X_{11} X_{21}^2, \quad (31)$$

$$D_0^2 X_{23} + \omega_2^2 X_{23} = -2D_0 D_2 X_{21} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{21} - \alpha_3 X_{21}^3 - \alpha_4 X_{21} X_{11}^2. \quad (32)$$

Решение уравнений (29)-(30) будем искать в виде

$$X_{j1} = A_j(T_2) \exp(i\omega_j T_0) + \Lambda_j \exp(i\Omega_F T_0) + \bar{A}_j(T_2) \exp(-i\omega_j T_0) + \bar{\Lambda}_j \exp(-i\Omega_F T_0), \quad (33)$$

где $\Lambda_j = 2 f_j / (\omega_j^2 - \Omega_F^2)$ ($j=1,2$) – неизвестные константы.

После подстановки решения (33) в уравнения порядка ε^3 были получены выражения, анализ которых показал, что помимо внешнего резонанса в системах с кубической нелинейностью при жестком воздействии внешней силы могут возникать вторичные резонансы, а именно: супергармонический резонанс $3\Omega_F = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2$ и субгармонический резонанс $\Omega_F = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2$.

Для каждого из типов внешнего резонанса в случае сочетания с внутренним резонансом один-к-одному были получены системы уравнений для определения амплитуд и фаз нелинейных вынужденных колебаний пластины на вязкоупругом основании, как это было сделано в случае мягкого воздействия внешней силы. Результаты численных исследований полученных систем уравнений представлены на Рис.7 для свободных и вынужденных колебаний пластины.

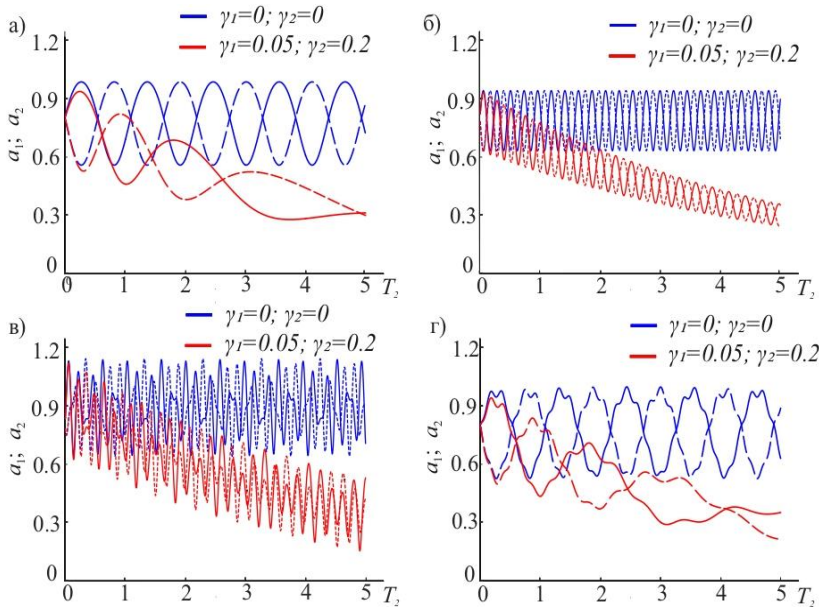


Рисунок 7 - Зависимость безразмерных амплитуд колебаний от времени T_2 пластинки на вязкоупругом основании: а) свободные колебания; б) вынужденные колебания при $f_1 = f_2 = 40$ в случае нерезонансного возбуждения $\Omega_F = 0,25\omega_1$; в) супергармонический резонанс $3\Omega_F = \omega_1$; г) субгармонический резонанс $\Omega_F = 3\omega_1$, где a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

Из Рис.7б следует, что жесткое нерезонансное возбуждение влияет на амплитуду как незатухающих ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), так и затухающих ($\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = 0.2$) колебаний пластины, а частота колебаний является функцией амплитуды приложенной силы в отличие от случая мягкого нерезонансного возбуждения. В случае супергармонического резонанса (Рис. 7в) наблюдается уменьшение периода колебаний и заметный рост

амплитуд в сравнении со свободными колебаниями (Рис.7а), в то время как в случае субгармонического резонанса (Рис. 7г) заметно увеличение периода колебаний.

В третьей главе исследованы нелинейные колебания упругой пластины на вязкоупругом основании при воздействии подвижной гармонической силы, перемещающейся с постоянной скоростью вдоль оси x .

Уравнение движения пластинки фон Кармана, колеблющейся в вязкоупругой окружающей среде, относительно поперечного прогиба $w = w(x, y, t)$ в этом случае запишется в виде:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = P \delta(x - f(t)) \delta(y - b/2) \sin \Omega_p t - F_1 - F_2, \quad (34)$$

где P и Ω_p – амплитуда и частота приложенной силы, $f(t)$ – функция, определяющая положение подвижной нагрузки. Значения функции $f(t)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(t) \leq a$, и в случае движения с постоянной скоростью $f(t) = Vt$.

Применяя процедуру решения уравнений движения, описанную во второй главе, были получены выражения, анализ которых показал, что в случае воздействия подвижной силы внутренний резонанс 1:1 может сопровождаться внешним резонансом, когда выполняется одно из следующих условий: (1) $\omega_i = \omega_{fi} + \Omega_p$ или (2) $\omega_i = \omega_{fi} - \Omega_p$, где $\omega_{fi} = \pi m_i V$ – частоты, зависящие от скорости движения и номеров взаимодействующих мод колебаний.

В результате приходим к следующей системе уравнений для определения амплитуд и фаз колебаний:

$$(a_1^2)^{\cdot} + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + p_1 \omega_1^{-1} a_1 \sin \varphi_1 = 0, \quad (34)$$

$$(a_2^2)^{\cdot} + s_2 a_2^2 - \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + p_2 \omega_2^{-1} a_2 \sin \varphi_2 = 0, \quad (35)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} a_1^2 - \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta + \frac{1}{2} p_1 (\omega_1 a_1)^{-1} \cos \varphi_1 = 0, \quad (36)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \lambda_2 - \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} a_2^2 - \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 - \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 \cos \delta + \frac{1}{2} p_2 (\omega_2 a_2)^{-1} \cos \varphi_2 = 0. \quad (37)$$

Уравнения (34)-(37) решались численно при помощи метода Рунге-Кутты четвертого порядка. В качестве численного примера рассматривалась квадратная пластина при $m_1 = n_2 = 1$, $m_2 = n_1 = 3$. Гармоническая сила движется с постоянной скоростью $V = 0,318$ ($V = 30 \text{ м/с}$) и частотой $\Omega_p = 9,13$ ($\Omega_p = 95 \text{ с}^{-1}$) вдоль оси x . Из Рис.8 следует, что увеличение амплитуды внешней силы приводит к увеличению безразмерных амплитуд колебаний пластины.

Следует отметить, что в случае мягкого воздействия подвижной силы амплитуды и фазы нелинейных колебаний пластины не зависят от скорости движения нагрузки в условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов. Задавая параметр скорости, можно лишь регулировать условие наложения внешнего резонанса на внутренний, меняя значение резонансной частоты колебаний системы и номера мод собственных колебаний, соответствующих данной частоте.

Четвертая глава посвящена анализу нелинейных колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании при воздействии подвижной подрессоренной нагрузки (Рис.9). Уравнения движения системы «пластина + вязкоупругое основание» в этом случае запишется в виде:

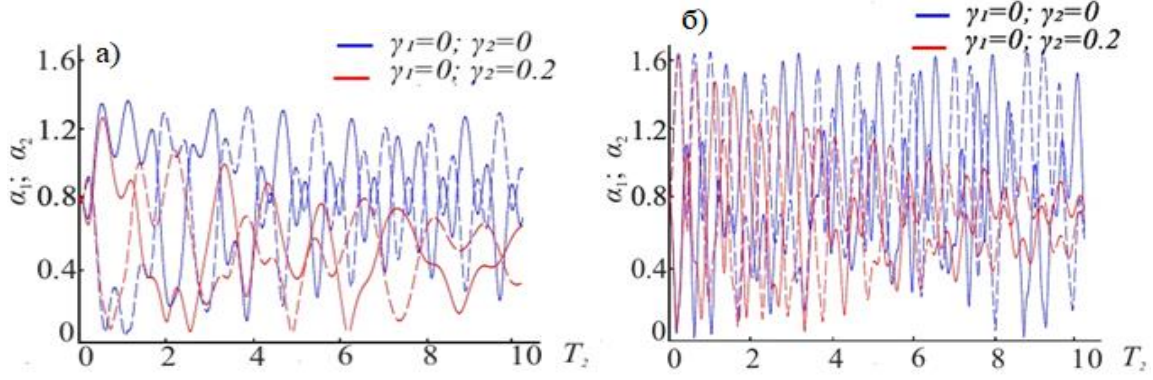


Рисунок 8 - Зависимость безразмерных амплитуд вынужденных колебаний пластинки на вязкоупругом основании от времени T_2 : а) $p_1 = -3, p_2 = 3$; б) $p_1 = -10, p_2 = 10$; a_1 - пунктирная линия, a_2 - сплошная линия.

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -m \left(g + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \delta(x - s(t)) \delta(y - 0.5b) - F_1 - F_2, \quad (38)$$

где m – масса осциллятора, $q = q(t)$ – перемещение осциллятора, g – ускорение свободного падения, $s(t)$ – функция, определяющая положение осциллирующей нагрузки. Значения функции $s(t)$ удовлетворяют условию $0 \leq s(t) \leq a$, и в случае движения с постоянной скоростью $s(t) = Vt$.

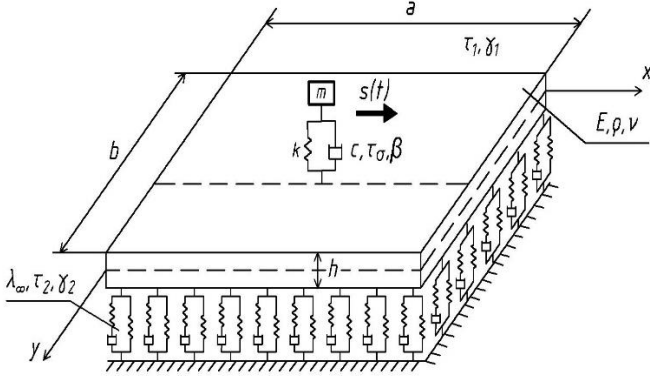


Рисунок 9 – Схема пластинки на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки.

Уравнение движения осциллятора имеет вид:

$$m \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + c \left(\frac{d}{dt} \right)^\beta q + kq = c \left(\frac{d}{dt} \right)^\beta w(Vt, t) + kw(Vt, t) - mg, \quad (39)$$

где k – жесткость пружины, $c = k\tau_\sigma^\beta$ – коэффициент демпфирования амортизатора, $0 \leq \beta \leq 1$ – порядок дробной производной осциллятора, $w(Vt, t)$ – прогиб пластины в точке приложения подрессоренной нагрузки.

Малая вязкость осциллятора. Рассмотрим сначала решение задачи для случая, когда нелинейность пластинки, вязкость амортизатора осциллирующей нагрузки и коэффициенты при силах демпфирования среды и основания задаются величинами порядка ε . Внешний резонанс в данном случае наложится на внутренний резонанс 1:1 при следующих условиях: (1) $\omega_i = \omega_0 + \omega_{fi}$ или (2) $\omega_i = \omega_0 - \omega_{fi}$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота упругого осциллятора.

В результате получим систему из шести связанных нелинейных дифференциальных уравнений для определения амплитуд и фаз колебаний системы:

$$\left(a_1^2\right)' + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2h_1 \omega_0^2 \omega_1^{-1} a_1 a_3 \cos \beta_7 = 0, \quad (39)$$

$$\left(a_2^2\right)' + s_2 a_2^2 - \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2h_2 \omega_0^2 \omega_2^{-1} a_2 a_3 \cos \beta_8 = 0, \quad (40)$$

$$\left(a_3^2\right)' + s_3 a_3^2 - \frac{1}{2} \eta_1 \omega_0 a_1 a_3 (l_1 + \cos \beta_7) - \frac{1}{2} \eta_2 \omega_0 a_2 a_3 (l_2 + \cos \beta_8) = 0, \quad (41)$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2K_1) - \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 - K_2) - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta - h_1 \omega_0^2 (\omega_1 a_1)^{-1} a_3 \sin \beta_7 = 0, \quad (42)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \lambda_2 - \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} (a_2^2 + 2K_2) - \alpha_4 \omega_2^{-1} (a_1^2 - K_1) - \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 \cos \delta - h_2 \omega_0^2 (\omega_2 a_2)^{-1} a_3 \sin \beta_8 = 0, \quad (43)$$

$$\dot{\varphi}_3 - \frac{1}{2} \lambda_3 - \frac{1}{4} \eta_1 \omega_0 a_1 a_3^{-1} (k_1 + \sin \beta_7) - \frac{1}{4} \eta_2 \omega_0 a_2 a_3^{-1} (k_2 + \sin \beta_8) = 0, \quad (44)$$

где $\beta_7 = \varphi_1 - \varphi_3$, $\beta_8 = \varphi_2 - \varphi_3$ - сдвиги фаз колебаний, $s_3 = \omega_0^{\beta+1} \tau_\sigma^\beta \sin \theta$,

$$\lambda_3 = \omega_0^{\beta+1} \tau_\sigma^\beta \cos \theta, \quad \theta = \frac{1}{2} \pi \beta, \quad l_i = \omega_i^\beta \tau_\sigma^\beta \cos(\theta + \beta_i), \quad k_i = \omega_i^\beta \tau_\sigma^\beta \sin(\theta + \beta_i),$$

$$K_i = -4h_i^2 g^2 / (\omega_{fi}^2 - \omega_i^2)^2 \quad (i=1,2).$$

Конечная вязкость осциллятора. В данном случае вязкость осциллирующей нагрузки задается конечной величиной порядка ε^0 . Внешний резонанс в данном случае наложится на внутренний резонанс 1:1 при следующих условиях: (1) $\omega_i = \omega + \omega_{fi}$ или (2) $\omega_i = \omega - \omega_{fi}$, где ω - частота затухающих колебаний осциллятора Кельвина-Фойгта с коэффициентом демпфирования α .

В результате получим систему нелинейных дифференциальных уравнений для определения амплитуд и фаз колебаний системы:

$$\left(a_1^2\right)' + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2h_1 \omega_1^{-1} a_1 a_{30} \left[2\alpha \omega \sin \chi_1 - (\alpha^2 - \omega^2) \cos \chi_1 \right] = 0, \quad (45)$$

$$\left(a_2^2\right)' + s_2 a_2^2 - \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2h_2 \omega_2^{-1} a_2 a_{30} \left[2\alpha \omega \sin \chi_2 - (\alpha^2 - \omega^2) \cos \chi_2 \right] = 0, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2K_1) - \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 - K_2) - \\ - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta + h_1 (\omega_1 a_1)^{-1} a_{30} \left[2\alpha \omega \cos \chi_1 + (\alpha^2 - \omega^2) \sin \chi_1 \right] = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \lambda_2 - \frac{3}{2} \alpha_3 \omega_2^{-1} (a_2^2 + 2K_2) - \alpha_4 \omega_2^{-1} (a_1^2 - K_1) - \\ - \frac{1}{2} \alpha_4 \omega_2^{-1} a_1^2 \cos \delta + h_2 (\omega_2 a_2)^{-1} a_{30} \left[2\alpha \omega \cos \chi_2 + (\alpha^2 - \omega^2) \sin \chi_2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

где $\chi_1 = \varphi_1 - \varphi_{30}$, $\chi_2 = \varphi_2 - \varphi_{30}$ - сдвиги фаз колебаний.

На Рис.10 представлены результаты численного анализа полученных систем уравнений для двух случаев вязкости осциллятора при $f_1 = -25$, $f_2 = 25$. Затухание колебаний по модели внешней нагрузки с малой вязкостью происходит быстрее, чем по модели с конечной вязкостью, а период колебаний для первой модели больше. Затухание амплитуд колебаний увеличивается с увеличением параметров дробности окружающей среды и основания для обоих случаев вязкости осциллятора.

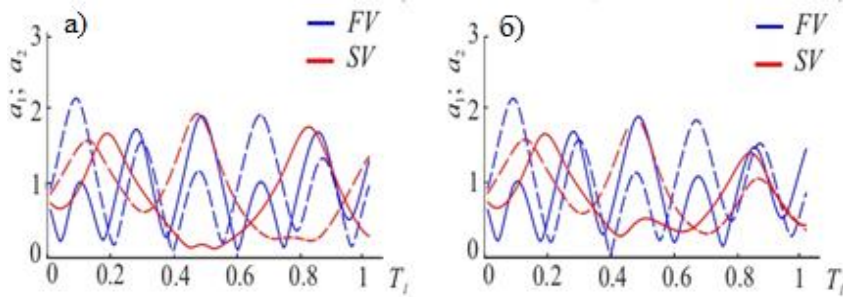


Рисунок 10 – Сравнительный анализ безразмерных амплитуд вынужденных колебаний для случаев малой вязкости (SV) и конечной вязкости (FV) осциллятора: а) $\gamma_1 = 0.1$, $\gamma_2 = 0.4$; б) $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 0.4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты проведенных исследований можно сформулировать следующим образом:

1. При помощи обобщенного метода многих временных масштабов получены разрешающие уравнения для определения нелинейных амплитуд и фаз вынужденных колебаний при воздействии гармонической силы, приложенной в точке или движущейся с постоянной скоростью. Данная система уравнений позволяет изменять характер вязкости окружающей среды и основания при различных параметрах дробности. Приближенные численные решения полученных уравнений найдены с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка, на основе которого для выполнения численных экспериментов был разработан алгоритм, зарегистрированный в государственном реестре программ для ЭВМ. По найденным амплитудам колебаний построены графики зависимости безразмерных перемещений от времени.

2. Проведен сравнительный анализ безразмерных амплитуд колебаний системы «пластина+вязкоупругое основание» для моделей основания Фусса-Винклера и Пастернака, демпфирующие свойства которых описываются моделями Кельвина-Фойгта или стандартного линейного твердого тела с дробными производными. Период колебаний для модели Кельвина-Фойгта больше, чем у модели стандартного линейного твердого тела, но, в свою очередь, диапазон изменения амплитуды у последней модели шире, что также следует учитывать при расчете конструкций.

3. При использовании моделей с дробными производными для описания свойств вязкоупругих сред и материалов коэффициенты демпфирования в определяющих системах уравнений зависят от собственных частот колебаний системы, что находится в хорошем соответствии с гипотезой модального демпфирования и экспериментальными данными. Показано, что при больших временах релаксации материала основания коэффициенты затухания для модели стандартного линейного твердого тела совпадают с коэффициентами для модели Кельвина-Фойгта.

4. Изучено влияние граничных условий на процесс нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании. Показано, что полученная система разрешающих уравнений для определения амплитуд и фаз нелинейных колебаний пластинки является универсальной для различных типов граничных условий, для каждого из которых вычисляются отдельно лишь коэффициенты и собственные частоты колебаний механической системы. Колебания прямоугольной упругой пластины, защемленной по контуру, происходят с наибольшей собственной частотой по сравнению с остальными типами граничных условий.

5. Рассмотрено влияние порядка малости амплитуды внешней гармонической силы на процесс нелинейных колебаний системы в случаях ее «мягкого» и «жесткого» возмущения. Показано, что в случае «жесткого» воздействия внешней силы при нелинейных колебаниях пластины могут возникнуть дополнительные виды внешних

резонансов, а именно супергармонический и субгармонический резонансы, для каждого из которых получены разрешающие системы уравнений для определения амплитуд и фаз колебаний пластины в условиях сочетания с внутренним резонансом один-к-одному.

6. Изучено влияние амплитуды подвижной нагрузки на характер нелинейных вынужденных колебаний. Показано, что с ростом амплитуды внешней силы увеличивается диапазон изменения амплитуд колебаний. Условие наступления внешнего резонанса при действии подвижной нагрузки можно регулировать за счет изменения ее скорости.

7. Решена задача о нелинейных колебаниях упругой пластинки на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки. Получены разрешающие системы уравнений для определения нелинейных амплитуд и фаз колебаний для случаев малой и конечной вязкости осциллятора. Сравнительный анализ двух случаев показал, что затухание колебаний для модели внешней осциллирующей нагрузки с малой вязкостью происходит быстрее, чем для модели с конечной вязкостью, в то время как период колебаний у последней модели меньше.

Основные положения диссертационной работы опубликованы в следующих работах:

Публикации в рецензируемых научных изданиях, в которых должны быть опубликованы результаты диссертации, и приравненных к ним изданиям, индексируемых в международных базах данных

1. Krusser A.I. To the question on the correctness of fractional derivative models in dynamic problems of viscoelastic bodies / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, A.I. Krusser // Mechanics Research Communications. – 2016. – Vol. 77. – P. 44-49. (Q2 Web of Science, Q1 Scopus).
2. Krusser A.I. Impact response of a nonlinear viscoelastic auxetic doubly curved shallow shell / Yu. A. Rossikhin, A.I. Krusser, M.V. Shitikova // Proceedings of the 24th International Congress on Sound and Vibration. London, UK, 23-27 July 2017 (Scopus).
3. Krusser A.I. Impact response of a nonlinear viscoelastic auxetic plate / A. I. Krusser, Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 489, Article ID 012038. (Web of Science, Scopus).
4. Krusser A.I. Classification of viscoelastic models with integer and fractional order derivatives / A.I. Krusser, M.V. Shitikova // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 747, Article ID 012007. (Scopus).
5. Krusser A.I. Nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation modelled by the fractional derivative standard linear solid model / M.V. Shitikova, A.I. Krusser // EASD Procedia. – 2020. – P. 355-368. Paper ID 20091. (Scopus).
6. Krusser A.I. Force driven vibrations of nonlinear plates on a viscoelastic Winkler foundation under the harmonic moving load / M.V. Shitikova, A.I. Krusser // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol. 17(4). – P. 161–180. (Scopus).
7. Krusser A.I. The effect of boundary conditions on nonlinear vibrations of plates on a viscoelastic base via the fractional calculus standard linear solid model / M. V. Shitikova, A.I. Krusser // Advances in Nonlinear Dynamics. – 2022. – Vol.1. – P.179-188. (MathSciNet).
8. Krusser A.I. Dynamic analysis of an elastic plate resting on a nonlinear fractional-order viscoelastic Pasternak foundation and subjected to moving load / M. V. Shitikova, A.I. Krusser // Lecture Notes in Civil Engineering. – 2022. – Vol.168. – P.13-24. (Scopus).

9. Krusser A.I. Models of viscoelastic materials: a review on historical development and formulation / M.V. Shitikova, A.I. Krusser // *Advanced Structured Materials*. – 2022. – Vol. 175. – P. 285-326. (Scopus, MathSciNet).
10. Круссер А.И. Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными / А.И. Круссер, М.В. Шитикова // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*. – 2022. – Т. 26(4). – С. 694-714. DOI: 10.14498/vsgtu1957 (BAK, Web of Science, Scopus).
11. Krusser A.I. On nonlinear vibrations of an elastic plate on a fractional viscoelastic foundation in a viscoelastic medium in the presence of the one-to-one internal resonance / M.V. Shitikova, V.V. Kandu, A. I. Krusser // *Journal of Sound and Vibration*. – 2023. – Vol. 549. – 117564. (Q1 Web of Science, Q1 Scopus).

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

12. Программный комплекс численных исследований нелинейных колебаний прямоугольных пластин на вязкоупругом основании с использованием операторов дробного порядка / А.И. Круссер, М.В. Шитикова. Регистрационный № RUS 2022668236 от 4 октября 2022 года.

Статьи и материалы конференций

13. Krusser A.I. The simplest fractional derivative models of viscoelasticity and their correctness in problems of thin body dynamics / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova, A.I. Krusser // *Book of Abstracts of the XLIV International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics»*. – St. Petersburg, June 27 – July 01, 2016. – St. Petersburg: IMASH, 2016. – P. 70.
14. Круссер А.И. Анализ ударного взаимодействия нелинейной вязкоупругой ауксетичной пластинки / А.И. Круссер, Ю.А. Россихин, М.В. Шитикова // *Труды юбилейной XXX международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения*. – Москва, 20-23 ноября 2018. – Москва: Изд-во ИМАШ РАН, 2019. – С. 609-612.
15. Круссер А.И. Классификация моделей линейной вязкоупругости / А.И. Круссер, М.В. Шитикова // *Труды XXXI международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения*. – Москва, 4-6 декабря 2019. – Москва: Изд-во ИМАШ РАН, 2020. – С. 28-31.
16. Круссер А.И. Анализ динамического поведения нелинейных пластинок на вязкоупругом основании при наличии внутреннего резонанса / А.И. Круссер, М.В. Шитикова // *Сборник научных трудов РААСН*. – М.: Издательство АСВ, 2021. – Т.2. – С. 315-328.
17. Круссер А.И. Динамический анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной подрессоренной нагрузки / А.И. Круссер // *Тезисы XV Международной научно-технической конференции «Актуальные вопросы архитектуры и строительства»*. Новосибирск, 19-21 апреля 2022. – С. 13.
http://www.sibstrin.ru/conference/15_mntk/.

Подписано в печать 18.04.2023г. Формат 80×64 1/16

Бумага писчая. Усл. п.л. 1,0 Тираж 100 экз. Заказ № 126.

Отпечатано: отделом оперативной полиграфии ВГТУ
394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84