

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тульский государственный университет»**

На правах рукописи

ФОМИН Антон Валерьевич

**МЕТОД РАСЧЕТА ОБДЕЛОК ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ
ТОННЕЛЕЙ, СООРУЖЕННЫХ ЗАКРЫТЫМ СПОСОБОМ
ВБЛИЗИ НАКЛОННОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

*Специальность: 25.00.20 – Геомеханика, разрушение горных пород,
рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика*

**диссертация
на соискание ученой степени кандидата технических наук**

**Научный руководитель -
д-р техн. наук, доцент
Сергей Владимирович Анциферов**

Тула – 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ	12
Выводы	48
2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБДЕЛОК ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОННЕЛЕЙ, СООРУЖЕННЫХ ВБЛИЗИ НАКЛОННОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, С МАССИВОМ ГРУНТА	50
2.1 Общая расчетная схема	50
2.2 Постановка плоской задачи теории упругости о действии собственного веса грунта (задача 1)	53
2.3 Постановка плоской задачи теории упругости о действии веса объектов на поверхности (задача 2)	55
Выводы	57
3 РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	58
3.1 Решение краевой задачи ТФКП, соответствующей задаче о действии собственного веса грунта (задача 1)	59
3.1.1 Граничные условия краевой задачи ТФКП	59
3.1.2 Определение функций $f_m(t_{0,m})$	61
3.1.3 Преобразованные граничные условия	64
3.1.4 Определение главных векторов усилий на контурах отверстий	66
3.1.5 Представления комплексных потенциалов	67
3.1.6 Аналитическое продолжение потенциалов через границу полуплоскости	67
3.1.7 Получение соотношений, связывающих коэффициенты разложений потенциалов в среде и в кольцах	81

3.1.8 Формирование и решение систем алгебраических уравнений	87
3.1.9 Вычисление напряжений	91
3.2 Решение краевой задачи ТФКП, соответствующей задаче о действии веса объектов на поверхности	94
3.2.1 Граничные условия краевой задачи ТФКП	94
3.2.2 Определение функции $f(t_0)$	96
3.2.3 Представление комплексных потенциалов и преобразование граничных условий	97
3.2.4 Формирование и решение систем уравнений	104
3.2.5 Вычисление напряжений	104
3.3 Алгоритм расчета	106
3.4 Проверка точности удовлетворения граничных условий	120
Выводы	121
4 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОГРАММЫ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ РАЗРАБОТАННЫЙ МЕТОД. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ С ДАННЫМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ ДРУГИМИ АВТОРАМИ	123
4.1 Примеры расчета	123
4.1.1 Определение напряженного состояния массива грунта вокруг двух параллельных незакрепленных выработок, расположенных вблизи склона	123
4.1.2 Определение напряженного состояния обделок двух параллельных тоннелей с одинаковыми поперечными сечениями	128
4.1.3 Определение напряженного состояния обделок двух параллельных тоннелей с различными размерами поперечных сечений	130

4.1.4	Определение напряженного состояния обделок трех параллельных тоннелей с различными размерами поперечных сечений	133
4.1.5	Определение напряженного состояния обделок параллельных тоннелей с учетом последовательности сооружения тоннелей и отставания возведения обделок при действии собственного веса грунта и веса объекта на поверхности	135
4.2	Сравнение результатов расчетов с данными, полученными другими авторами	143
4.2.1	Напряженное состояние временной крепи железнодорожного тоннеля	144
4.2.2	Напряженное состояние однородного изотропного откоса, ослабленного горизонтальной круглой выработкой	147
4.2.3	Напряженное состояние временной крепи транспортного тоннеля	148
4.2.4	Сравнение с данными экспериментов по определению устойчивости однородного откоса, подработанного горизонтальной выработкой	149
	Выводы	150
5	ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛОК ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОННЕЛЕЙ ОТ ОСНОВНЫХ ВЛИЯЮЩИХ ФАКТОРОВ	152
	Выводы	160
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	161
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	163

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Развитие транспортных и энергетических систем, предприятий горнодобывающей промышленности обуславливает строительство закрытым способом комплексов близко расположенных тоннелей различной протяженности, размеров и форм поперечного сечения на территориях со сложным горным рельефом или вблизи склонов.

Накопленные данные натурных и экспериментальных исследований, а также опыт возведения подобных объектов свидетельствуют о том, что наличие близко расположенной наклонной земной поверхности приводит к существенному перераспределению напряжений в массиве грунта (пород) и в подземных конструкциях, появлению в них дополнительных концентраций напряжений, влияющих на несущую способность обделок и надежность комплекса подземных сооружений в целом. Механические процессы в грунтовых массивах, обусловленные наличием близко расположенной наклонной земной поверхности, становились причиной возникновения аварийных ситуаций в горных выработках при освоении месторождений полезных ископаемых, сооружении тоннелей линий метрополитена, автомобильных и железнодорожных магистралей. Для предотвращения подобных случаев в практике подземного строительства предусматривается использование усиленных конструкций крепи или обделок, ремонт или перекрепление участков выработок при эксплуатации тоннелей.

Недостаточная изученность геомеханических процессов в горных массивах, закономерностей влияния рельефа местности и наземных объектов на компактно расположенные подземные сооружения и их напряженно-деформированное состояние приводит к использованию на этапе проектирования необоснованно завышенных коэффициентов запаса прочности применяемых конструкций, что увеличивает затраты на строительство и эксплуатацию тоннелей.

В нормативно-технических документах, регламентирующих проектирование и строительство тоннелей различного назначения, отсутствуют рекомендации по учету влияния земного рельефа на напряженно-деформированное состояние обделок тоннелей.

Оценка прочности подземных сооружений, расположенных вблизи склонов, выполняется в настоящее время, как правило, с использованием результатов натурных и лабораторных исследований, а также компьютерного моделирования с использованием специализированных проблемно-ориентированных программ, реализующих численные решения задач геомеханики и механики подземных сооружений, полученные, как правило, методом конечных элементов. Это требует учета не только физико-механических свойств вмещающего массива грунта (пород), материалов обделок (крепи), но и влияние наклонной земной поверхности, компоновки выработок, наличия близко расположенных наземных объектов.

Особое место в практике проектирования протяженных подземных сооружений занимают аналитические методы расчета, базирующиеся на строгих решениях соответствующих задач механики сплошной среды. Разработанные на единой научно-методологической основе, они позволяют выполнять расчеты монолитных и многослойных обделок тоннелей как глубокого, так и мелкого заложения, в том числе - расположенных вблизи наклонной земной поверхности, но не испытывающих влияния соседних подземных сооружений. Метода расчета обделок параллельных тоннелей, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, адекватно учитывающего основные влияющие на прочность подземных конструкций факторы, в настоящее время не имеется.

Одним из путей решения этой проблемы является дальнейшее развитие теоретических положений и опыта разработки эффективных аналитических методов расчета подземных конструкций, накопленных в Тульском государственном университете.

Целью работы является разработка метода расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных вблизи склона, при действии собственного веса грунта и нагрузок от веса объектов на поверхности, основанного на математическом моделировании взаимодействия элементов единой деформируемой геомеханической системы «массив грунта – наклонная поверхность – обделки тоннелей».

Идея работы заключается в оценке прочности конструкций подземных сооружений по результатам определения напряженного состояния геомеханической системы с помощью разработанного метода расчета, позволяющего уточнить известные и установить новые закономерности формирования их напряженного состояния.

Метод расчета позволяет учитывать следующие факторы, оказывающие существенное влияние на прочность подземных конструкций:

- угол наклона земной поверхности к горизонту;
- наличие в комплексе подземных сооружений нескольких параллельных тоннелей с различными размерами поперечных сечений;
- физико-механические и деформационные характеристики массива грунта и материала обделок;
- поле начальных напряжений в массиве грунта, обусловленных гравитационными силами;
- влияние веса объектов на поверхности, возведенных до или после сооружения выработок;
- последовательность проходки тоннелей и отставание возведения обделок от забоя;
- реологические свойства грунта в рамках теории линейной наследственной ползучести.

Наличие и применение соответствующего метода расчета позволит обосновать выбор технологии строительства тоннелей и конструкций применяемых обделок, последовательность проходки выработок, возможность

компактного расположения параллельных тоннелей с обеспечением безопасных расстояний между ними.

В процессе моделирования взаимодействия элементов геомеханической системы выполнено обоснование применяемых расчетных схем задач теории упругости для различных технологических этапов строительства, выполнены постановки и получены после перехода к краевым задачам теории функций комплексного переменного (ТФКП) с использованием соответствующего математического аппарата их решения с последующей реализацией в виде метода обделок тоннелей, предназначенного для практического применения.

Применяемые при выполнении работы **методы исследования** включают анализ научных публикаций по вопросам оценки напряженно-деформированного состояния конструкций подземных сооружений с учетом влияния рельефа местности; математическое моделирование взаимодействия обделок тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности, и массива грунта с использованием аппарата теории функций комплексного переменного; компьютерное моделирование возможных геомеханических ситуаций с использованием разработанных программ для ЭВМ, реализующих метод расчета; анализ и сравнение результатов определения напряженного состояния обделок тоннелей аналитическим методом с данными, полученными другими авторами численными методами, при натурных и лабораторных исследованиях.

Сформулированы следующие **основные научные положения**, выносимые на защиту:

- изменение угла наклона земной поверхности, компактное расположение тоннелей, наличие близко расположенных наземных объектов приводят к росту максимальных растягивающих и сжимающих напряжений в установленных радиальных сечениях обделок;

- снижение экстремальных напряжений в подземных конструкциях при определенных сочетаниях деформационных характеристик грунта и материалов обделок, наклоне поверхности и взаимном расположении тоннелей;
- закономерности формирования напряженного состояния массива грунта и обделок тоннелей, сооруженных вблизи склона, полученные с использованием разработанной математической модели взаимодействия элементов геомеханической системы.

Новизна основных научных и практических результатов представленного диссертационного исследования заключается в следующем:

- математическая модель, использующая основные положения механики сплошной среды и механики подземных сооружений, адекватно описывающая взаимодействие элементов геомеханической системы;
- постановки соответствующих задач теории упругости для весомой полубесконечной среды с наклонной границей, ослабленной произвольно расположенными подкрепленными круговыми отверстиями;
- решения поставленных задач теории упругости, полученные с использованием математического аппарата ТФКП;
- аналитический метод расчета обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности, позволяющий учесть основные факторы, влияющие на напряженное состояние подземных конструкций;
- закономерности формирования напряженного состояния обделок и массива грунта при расположении комплекса параллельных тоннелей вблизи склона.

Полученные научные результаты соответствуют паспорту специальности 25.00.20 – Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика (п.п. 1, 2, 4, 5, 11, 13).

Практическое значение работы заключается:

- в разработке алгоритма расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом вблизи

наклонной земной поверхности, при действии гравитационных сил, обусловленных весом грунта и объектов на поверхности;

- в создании программ для ЭВМ, позволяющих на этапе проектирования оценить напряженное состояние и прочность обделок тоннелей, сооруженных вблизи склонов;

- в установлении закономерностей формирования напряженного состояния обделок параллельных тоннелей при различных сочетаниях влияющих факторов.

Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций подтверждается корректной постановкой задачи исследования; использованием фундаментальных теоретических положений механики сплошной среды, геомеханики и механики подземных сооружений; применением адекватной математической модели, включающей постановки и решения соответствующих задач теории упругости; использованием апробированного математического аппарата ТФКП; достижением высокой точности выполнения граничных условий решенных задач; удовлетворительным согласованием результатов с данными, полученными другими авторами при решении частных задач численными методами, при натурных и лабораторных исследованиях.

Личный вклад автора заключается в разработке математической модели взаимодействия обделок параллельных тоннелей, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, и массива грунта; постановке задач теории упругости и получении их решений; составлении алгоритма и компьютерных программ расчета; установлении на основе результатов компьютерного моделирования закономерностей формирования напряженного состояния обделок тоннелей.

Апробация работы и ее основных положений выполнялась на научно-технических конференциях преподавателей и сотрудников ТулГУ (Тула, 2016 - 2020); Международной научно-практической конференции «Новая наука: От идеи к результату» (Сургут, 2016); X Международной конференции «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте» (С. -

Петербург, 2017); 17-ой Международной молодёжной научно-практической конференции «Моделирование. Фундаментальные исследования, теория, методы и средства» (Новочеркасск, 2017); Международной (заочной) научно-практической конференции «Актуальные вопросы современных научных исследований» (Минск, 2017); IV Международной (X Всероссийской) конференции «Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции» (Чебоксары, 2018); Международной научно-практической конференции «Научные исследования в области технических и технологических систем» (Тюмень, 2018); 17-ой Международной молодежной научно-практической конференции «Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» (Новочеркасск, 2018); VI Международной конференции «Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений» (Екатеринбург, 2019), Всероссийской научной конференции с международным участием «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли» (Новосибирск, 2019); XVI Международной научно-практической конференции "Экономика и инжиниринг: от теории к практике" (Минск, 2020).

Публикации. По теме научно-квалификационной работы опубликовано 16 печатных работ, из них 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК, и 13 в рецензируемых изданиях.

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 181 странице машинописного текста, состоит из введения, 5 разделов, содержащих 43 рисунков и 1 таблицу, заключения и списка литературы.

1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Напряженное состояние конструкций подземных сооружений различного назначения и окружающего его массива грунта (пород) зависит от естественного поля начальных напряжений в массиве, гористости рельефа, относительного расположения выработок, форм и размеров их поперечных сечений, применяемых обделок (крепи) и др. Практика проектирования и строительства комплексов близко расположенных тоннелей в районах со сложным рельефом земной поверхности требует совершенствования методов расчета, позволяющих адекватно учесть факторы, существенно влияющие на прочность применяемых конструкций [36, 41, 118, 119, 127, 135, 136, 143].

Как отмечается в [88], проектирование подземных сооружений является достаточно сложной задачей, имеющей существенные отличия от проектирования наземных объектов, выполняемого с использованием апробированных в течение длительного времени методик, базирующихся на положениях строительной механики и механики грунтов.

При проектировании комплексов подземных сооружений используется большой объем данных, полученных в процессе инженерно-геологических изысканий на площадке строительства и лабораторных исследований: физико-механические и деформационные характеристики массива грунта (пород) - удельный вес, влажность, пористость, водонасыщение, модуль деформации, коэффициент поперечной деформации, величина бокового давления в ненарушенном массиве грунта, коэффициент упругого отпора, угол внутреннего трения, коэффициент сцепления, параметры ползучести, а также информации, предварительно накопленной при строительстве тоннелей в аналогичных инженерно-геологических условиях.

Проектные решения в соответствии с требованиями документов [45, 78, 93 - 96, 103 - 110] должны обеспечивать безаварийное функционирование подземных сооружений при строительстве и эксплуатации за счет применения надежных, долговечных и экономичных конструкций. Указанные доку-

менты рекомендуют выполнять расчеты инженерными методами на заданные активные нагрузки с учетом отпора грунтового массива [29], использующими положения и методологию строительной механики и механики грунтов [28, 39, 87, 111]; аналитическими методами, базирующимися на решениях задач механики подземных сооружений [32 - 35, 64, 101, 124 – 126, 138, 145 - 148]; методами численного моделирования с использованием линейных и нелинейных моделей в зависимости от свойств грунтов и материалов конструкций [5, 22, 30, 38, 44, 53, 54, 62, 84, 116, 137, 139, 144, 149 - 153].

Используемые до настоящего времени инженерные методы расчета обделок на активные нагрузки, базирующиеся на методологии строительной механики, являются, по сути, развитием известного с 30-х годов прошлого века метода Метрогипротранса [29]. Нагрузки на подземные сооружения определяются по результатам инженерно-геологических изысканий с применением различных эмпирических гипотез образования свода [20, 21, 28, 87, 113, 114]. Для грунтов, в которых образование свода считается невозможным (неустойчивые, водонасыщенные несвязные или слабые глинистые грунты), нагрузки вычисляются с учетом давления всей толщи грунтов над тоннелем по приведенным в [87] формулам.

Существенными недостатками этих методов являются умозрительность эмпирических гипотез и положений, используемых при определении активных нагрузок; рассмотрение обделки как строительной конструкции вне массива грунта и, следовательно, невозможность адекватного учета собственной несущей способности грунта, его анизотропии, неоднородности или слоистости; взаимного влияния близко расположенных тоннелей; влияния земной поверхности, в том числе наклонной. Кроме этого, априори задаваемые нагрузки на конструкцию, моделирующую обделку, фактически не зависят от деформационных характеристик массива грунта, материала обделок, формы и размеров их поперечного сечения, что приводит к возрастанию расчетных величин внутренних усилий [32 - 34].

Эти методы ввиду отсутствия доступной вычислительной техники в недавнем прошлом являлись единственным инструментом инженеров и проектировщиков. Они принципиально не позволяют учесть влияние многих факторов, поэтому в полной мере не соответствуют уровню сложности проектирования современных подземных сооружений. Внедрение в практику проектирования мощных персональных компьютеров и соответствующего проблемно ориентированного программного обеспечения приводит к тому, что использование таких методов сокращается.

Альтернативой расчету подземных конструкций на активные нагрузки являются методы, базирующиеся на теоретических положениях механики сплошной среды, разделяющиеся по способу получения решения задач на аналитические [6, 18, 134, 138] и численные [49, 54, 84 - 86, 98, 131 – 133, 139 – 141, 144, 155 - 157].

Для определения напряженно-деформированного состояния подземных конструкций и вмещающего массива грунта используются специальные комплексы программ, реализующие численное решение плоских и пространственных задач механики подземных сооружений в линейной и нелинейной постановках - конечно-элементные программы Plaxis, Zsoil, Geoslope, FEModels, Лира; конечноразностная программа FLAC; программы, реализующие метод граничных интегральных уравнений.

Особенностью этих программных комплексов является их универсальность и возможность проведения расчетов с учетом технологии возведения подземных сооружений, существенно влияющей на возникающие в конструкциях расчетные усилия. Нормативно-технические документы [78, 93 - 96] рекомендуют использовать численные методы при расчете конструкций особо ответственных подземных сооружений.

Наибольшее распространение при проектировании подземных сооружений получил метод конечных элементов (МКЭ), который позволяет учесть достаточно большое количество факторов, влияющих на процесс формирования напряженно-деформированного состояния обделок.

В работах [24, 89 - 91] приведены результаты определения напряженного состояния временной крепи железнодорожных тоннелей, сооружаемых вблизи склона, полученные на основе численного пространственного моделирования. Разработанная авторами конечно-элементная модель [90] позволила учесть технологические особенности строительства тоннеля - использование уступного способа проходки с поочередной разработкой и креплением верхнего (калотты) и нижнего (штроссы) уступов сечения тоннеля; применение временной крепи, обеспечивающей устойчивость породных обнажений при проведении проходческих работ; возведение постоянной монолитной железобетонной обделки. Расчетные схемы представлены на рис. 1.1 а, б, в.

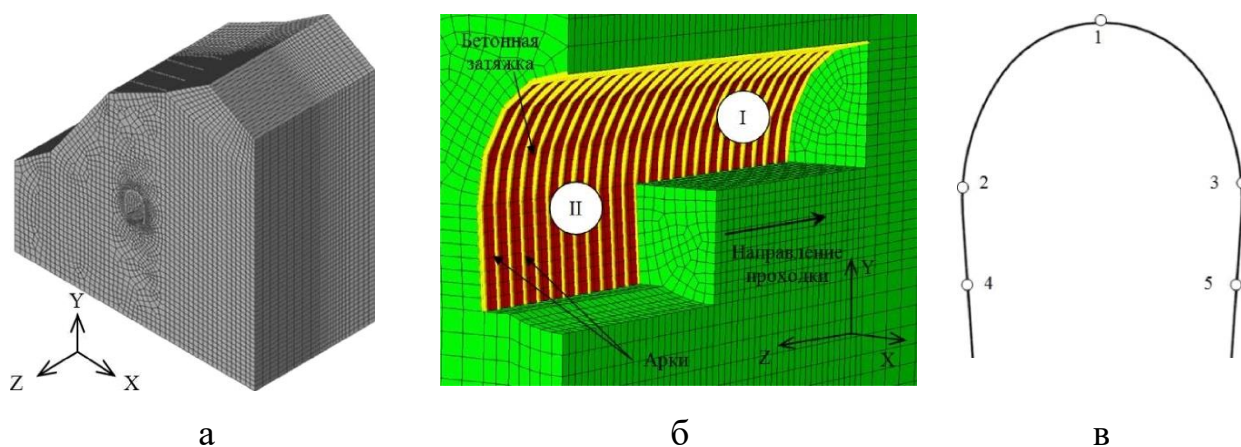


Рисунок 1.1 - Расчетные схемы: а – пространственная; б – укрупненная, учитывающая разработку и временное крепление калотты (I), штроссы (II); в - расположение контрольных точек

Граничные условия на гранях выделенной области (рис. 1.1 а) отражают отсутствие смещений узлов нижней грани в направлении оси Z , боковых - в направлении оси X , торцевых - в направлении оси Y ; верхняя поверхность модели считается свободно деформируемой. Подробная конечно-элементная схема, приведенная на рис. 1.1 б, учитывает основные этапы сооружения тоннеля, схема расположения характерных точек по периметру сечения крепи, в которых контролировалось изменение расчетных напряжений, изображена на рис. 1.1 в.

Область I (рис. 1.1 б) соответствует проходке и временному креплению калотты тоннеля; область II - проходке и временному креплению штроссы. В точках 1, 2 и 3 напряжения фиксировались во время обоих этапов проходки, в точках 4 и 5 - на этапе раскрытия штроссы тоннеля.

Анализ изменения напряженного состояния временной крепи выполнялся для двутавровых арок металлической крепи и бетона затяжки.

Приведены графики изменения сжимающих напряжений в характерных точках арки временной крепи: в своде (точка 1); левом (точки 2 и 4) и правом (точки 3 и 5) боках тоннеля. Полученные результаты свидетельствуют о росте напряжений в арке после ввода ее в работу на этапе раскрытия калотты, стабилизацию напряжения в арках до начала раскрытия штроссы. После разработки части штроссы и отхода забоя нижнего уступа на достаточное расстояние в своде и боках арки происходит незначительный рост, а затем снижение и стабилизация напряжений. В нижней части сечения тоннеля после закрепления штроссы незначительный рост напряжений сменяется на снижение, завершающееся их стабилизацией. Авторами делается вывод о перераспределении напряжений и, как следствие, появлении асимметрии эпюр напряжений в арках временного крепления тоннеля из-за учета наличия близко расположенной наклонной земной поверхности. Установлено также, что учет последовательности разработки калотты и штроссы приводит к уменьшению в 2...2,5 раза максимальных напряжений в штроссе по сравнению с напряжениями в калотте.

Далее исследовалось напряженно-деформированное состояние черного бетона временной крепи. Используемая пространственная конечно-элементная модель позволила выявить зоны локальных концентраций главных сжимающих напряжений (сечения внутреннего контура бетонной затяжки посередине между арками крепи), в 3...4 раза превышающих соответствующие напряжения в бетоне в сечениях вблизи металлических арок.

Приведенные результаты свидетельствуют о схожести процессов изменения напряжений в бетоне и в арках временной крепи: на начальном эта-

пе сжимающие напряжения в бетоне в своде и боках обделки резко возрастают, затем стабилизируются по мере удаления забоя от рассматриваемого поперечного сечения. В начале раскрытия штроссы тоннеля сжимающие напряжения в боках возрастают, достигая своих максимальных значений. По мере приближения забоя нижнего уступа к рассматриваемому сечению напряжения уменьшаются до тех пор, пока штросса тоннеля не будет раскрыта полностью. В точках 2 и 3 возобновляется процесс роста напряжений, но с меньшей интенсивностью в точке 3. При удалении забоя нижнего уступа напряжения в бетоне боков тоннеля стабилизируются.

В своде (точка 1) наблюдается рост напряжений от начала этапа раскрытия штроссы до момента удаления забоя нижнего уступа на достаточное расстояние. Характер изменения сжимающих напряжений в бетоне нижней части временного крепления (точки 4 и 5) аналогичен характеру изменения напряжений в бетоне свода выработки.

Полученные результаты свидетельствуют о существенном влиянии рельефа земной поверхности на напряженное состояние чернового бетона временной крепи, приводящем к перераспределению напряжений, росту их максимальных значений, появлению асимметрии эпюр.

Пространственный расчет позволяет установить практическое совпадение напряжений в бетоне штроссы и калотты тоннеля, что объясняется «выравнивающим» влиянием арок, являющихся, по сути, элементами армирования, на конечное распределение напряжений во временной крепи.

Учет этапов проходки тоннеля и влияния стальных арок на напряженное состояние чернового бетона позволяет оптимизировать параметры крепи – обоснованно использовать при креплении штроссы двутавров меньших размеров по сравнению с двутаврами в калотте.

В работе отмечается, что характеристики рассмотренной модели являются усредненными для тоннелей, сооружаемых вблизи земной поверхности со сложным рельефом. Полученные результаты для временной крепи показали выполнение условий прочности с достаточно большим запасом, что

может быть учтено при последующем расчете постоянной обделки.

Более сложными с точки зрения определения напряженно-деформированного состояния подземных конструкций являются задачи, в которых рассматриваются комплексы взаимовлияющих горных выработок различной пространственной конфигурации. Такие комплексы нередко используются при строительстве станций метрополитенов, транспортных узлов, околоствольных дворов вертикальных стволов и других систем выработок.

В работе [91] приведены результаты прогноза напряженно-деформированного состояния обделок двух параллельных тоннелей, сооружаемых в зоне взаимного влияния. Авторами отмечается необходимость исследования напряженного состояния обделок взаимовлияющих выработок, поскольку, во-первых, оно существенно отличается от состояния обделок одиночных тоннелей; а во-вторых, возможность количественного учета влияния расстояния между тоннелями на величину и распределение напряжений в обделках и целике позволит более адекватно оценить прочность и несущую способность конструкций.

Авторами использована пространственная конечно-элементная модель, позволяет учесть технологию строительства тоннелей и процессы, происходящие вблизи забоя. Расчетная схема приведена на рис. 1.2.

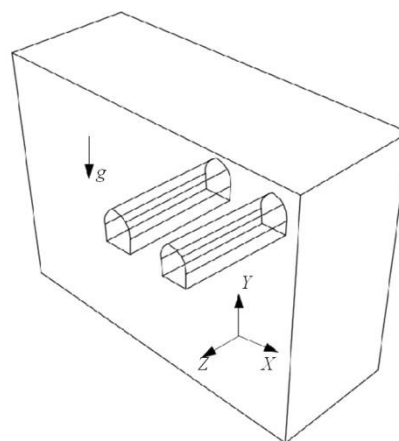


Рисунок 1.2 - Пространственная расчетная схема

При постановке задачи приняты следующие граничные условия на гранях выделенной области: запрещены смещения по нижней грани в направлении оси Y , по боковым граням – в направлении оси X , по торцевым

граням – в направлении оси Z , верхняя грань модели оставалась свободно деформируемой.

Модель предусматривает выполнение 140 расчетных шагов, которые позволяют учесть очередность строительства тоннелей (первым сооружается правый тоннель, вторым – левый) и выполнение работ по проходке и креплению каждого из тоннелей.

Для изучения напряженного состояния стальных арок временной крепи на различных этапах строительства в модели на участке, достаточно удаленном от границ рассматриваемой области, была выделена арка с контрольными точками, расположение которых показано на рис. 1.1 в.

В работе установлено, что в арке временной крепи возникают только сжимающие нормальные тангенциальные напряжения, и приведены графики их изменения по мере выполнения проходки тоннелей. Отмечается рост напряжений по абсолютной величине до начала раскрытия сечения второго тоннеля. Так как не учитывается влияние рельефа земной поверхности, до проходки второго тоннеля отмечается симметрия эпюр расчетных напряжений в арке временной крепи.

Строительство второго тоннеля приводит к постепенному линейному росту напряжений в арках крепи первого тоннеля по мере приближения к рассматриваемому сечению забоя второго тоннеля, который прекращается с момента начала раскрытия штроссы второго тоннеля, а также появлению асимметрии распределения напряжений, связанной с влиянием второго тоннеля. Увеличение наибольших напряжений со стороны второго тоннеля составляет от 10% до 45...50% к концу этапа раскрытия калотты.

После начала раскрытия штроссы второго тоннеля в верхней части крепи первого наблюдается некоторая разгрузка, за счет которой практически компенсируется асимметрия распределения напряжений в сводовой части арки. В точках лотковой части крепи формирование напряжений в процессе раскрытия штроссы второго тоннеля установлен дополнительный нелинейный рост напряжений, интенсивность которого увеличивается при при-

ближении сечения забоя. Максимум прироста фиксируется при раскрытии штроссы на одном уровне с контрольным сечением. Прирост напряжений по отношению к значениям на начало раскрытия штроссы во втором тоннеле составляет порядка 80...100%, затем с удалением забоя штроссы второго тоннеля напряжения в контрольном сечении уменьшаются. Асимметрия распределения напряжений в штроссовой части арки первого тоннеля при раскрытии штроссы второго только увеличивается.

Установлено, что раскрытие сечения второго тоннеля приводит к перераспределению напряжений в арках временной крепи первого тоннеля; в своде арки - к некоторому уменьшению напряжений. По мере продвижения от свода арки к ее бокам и далее к подошве тоннеля увеличивается прирост напряжений, обусловленный влиянием второго тоннеля: в верхней части боков арки прирост напряжений в среднем составляет 10...15%; в нижней части боков арки напряжения возрастают в 8...10 раз.

Для анализа процесса формирования сжимающих напряжений на внутреннем контуре бетона временной крепи выбрано сечение в центре участка первого тоннеля. Для него приводятся значения напряжений к концу строительства участка, свидетельствующие о симметрии распределения напряжений.

До раскрытия штроссы второго тоннеля во всех контрольных точках внутреннего контура бетона временной крепи, кроме точки в своде, происходит рост сжимающих напряжений, близкий к линейному. В указанной точке до начала раскрытия штроссы второго тоннеля, т.е. на этапе разработки калотты, изменение напряжений очень незначительно.

К концу этапа раскрытия калотты второго тоннеля в исследуемом сечении напряжения в верхней части внутреннего контура чернового бетона временной крепи возрастают на 15...20%; в нижней части - увеличиваются в 2...2,5 раза. Анализ процесса формирования сжимающих напряжений при выполнении раскрытия штроссы второго тоннеля показал отсутствие единой закономерности формирования напряжений для всех точек внутреннего кон-

тура чернового бетона временной крепи.

Установлено, что влияние сооружения второго тоннеля на напряженное состояние крепи первого выражается в появлении асимметрии распределения напряжений – увеличение, за исключением точек свода, где наблюдается снижение, сжимающих напряжений в бетоне временной крепи. Отмечается, что в стальных арках и бетоне, как элементах временной крепи, закономерности формирования напряжений являются сходными.

В работе [92] исследовано распределение напряжений в обделках комплекса пространственно расположенных выработок с учетом последовательности их строительства. Приведена методика определения напряженного состояния обделок конкретного комплекса тоннельных выработок, включающего камеру большого сечения, автодорожный и железнодорожный тоннели, штольни и сбойки. Модель, дающая представление о расположении выработок транспортного узла, используемая на последнем этапе расчета, представлена на рис. 1.3.



Рисунок 1.3 - Конечно-элементная модель комплекса сооружений

Прогноз напряженно-деформированного состояния обделок объектов в комплексе, имеющем пространственную конфигурацию, усложняется

необходимостью учета последовательности сооружения выработок и особенностей технологии их строительства.

Учет влияния технологии строительства выработок тоннельного комплекса на формирование напряженно-деформированного состояния их обделок выполнялся приближенно с помощью коэффициента α^* [33]. Для определения α^* были использованы несколько вспомогательных пространственных конечно-элементных моделей, позволяющих оценить сдерживающее влияние забоя на развитие смещений в незакрепленных выработках заданной конфигурации поперечного сечения. На рис. 1.4 приведены результаты определения α^* для сервисно-технологических штолен.

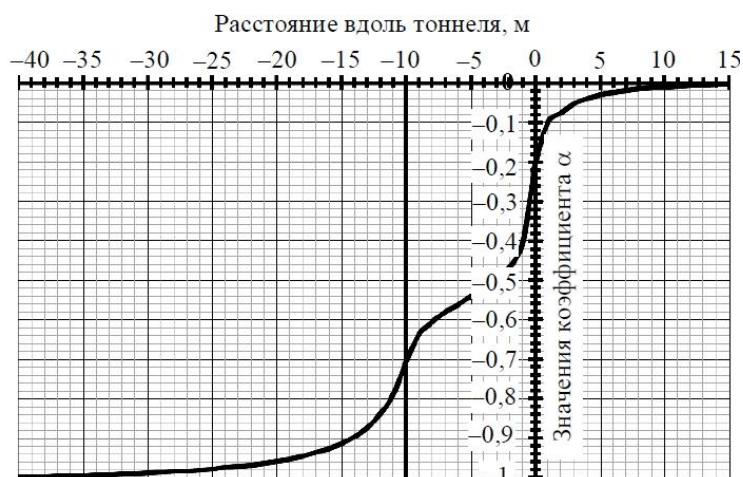


Рисунок 1.4 - Зависимость коэффициента α^* от расстояния до забоя

Считая, что обделка сервисно-технологических штолен вступает в работу непосредственно после схода с оболочки щита, учитывая значительное взаимное влияние близко расположенных штолен, коэффициент α^* принят равным 0,7. На основе аналогичных исследований коэффициент α^* для обделок автодорожного и железнодорожного тоннелей принят равным 0,8; для обделки камеры - 0,55 и т.д.

Строительство камеры тоннельного узла производится с применением уступного способа. При этом изначально раскрытие ее сечения выполняется с использованием временного комбинированного крепления двутавровыми

полигональными арками с бетонной затяжкой между рамами крепления. Авторы отмечают, что изучение особенностей работы данного крепления потребовало создания отдельной модели, в которой учтена постоянная обделка камеры из монолитного железобетона.

Анализ напряженного состояния подземных конструкций выполнен на основе полученных эпюр нормальных тангенциальных напряжений в точках внутренних контуров обделок тоннелей. Результаты свидетельствуют о существенном увеличении напряжений в обделках штолен в местах сопряжения с автодорожным тоннелем, а также возникновении в лотках штолен растягивающих напряжений.

Исследовано влияние проведения автодорожного и железнодорожного тоннелей на напряженное состояние обделки камеры - в центральной части камеры концентрация растягивающих напряжений смещается в сторону железнодорожного (бóльшего) тоннеля; практически во всех точках обделки камеры происходит увеличение напряжений в 2...4 раза; максимальные сжимающие напряжения локализуются в боках в средней части камеры; максимальные растягивающие напряжения локализуются в правой части лотка средней части камеры.

После проведения сбоек изменяется напряженное состояние обделки демонтажной камеры - растягивающие напряжения локализуются только в приторцевых частях обделки; в средней части камеры происходит перераспределение напряжений, в результате которого на внутреннем контуре обделки действуют только сжимающие напряжения; в месте сопряжения камеры и сбоек возникает концентрация сжимающих напряжений; напряжения в сопряжении камеры с автодорожным тоннелем превышают напряжения в сопряжении камеры с железнодорожным тоннелем.

В [57] отмечается, что МКЭ является одним из эффективных инструментов горной геомеханики, позволяющих с высокой степенью точности решать задачи, решения которых аналитическими методами в настоящее время не получены. В работе выполнена оценка напряженно-деформированного со-

стояния массива, вмещающего транспортную выработку полигонального сечения, которая пройдена в непосредственной близости от склона. Вид портала исследуемой выработки и принятая расчетная схема изображены на рис. 1.5 а, б.

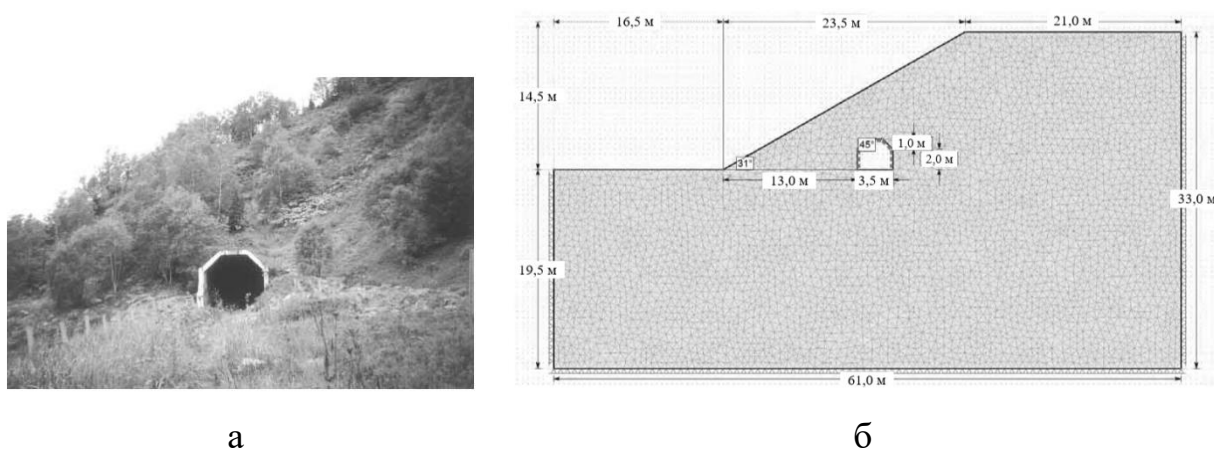


Рисунок 1.5 - Выработка полигонального сечения вблизи склона:

а – внешний вид портала; б – расчетная схема

Вмещающие породы представлены нетрещиноватыми песчаниками. Для крепления выработки использована обделка из бетона. В работе применена плоская конечно-элементная модель, что оправдано для протяженных выработок. Горные породы моделируются упругопластической средой. Боковые поверхности модели закреплены в горизонтальном направлении, нижняя – в вертикальном. Перемещения верхней границы не ограничиваются. Авторы отмечают, что одной из проблем, возникающих при подобных расчетах, является выбор размеров конечно-элементной области. В работе утверждается, что принятые размеры (рис. 1.5 б) исключают влияние ее границ на напряженно-деформированное состояние подкрепленного отверстия. В качестве критерия использовано утверждение о том, что для горных выработок, в окрестности которых анализируются механические процессы, размер зоны влияния можно определить, полагая, что на границе исследуемой области напряжения могут отличаться от их значений в ненарушенном выработкой массиве не более, чем на 15%. Заменяя сечение выработки некругового сече-

ния эквивалентной по площади окружностью, для условий задачи минимальное расстояние от выработки до границ модели должно составлять $\sim 10,5 \text{ м}$.

Задача решается в два этапа: на первом этапе определяется начальное напряженное состояние массива, на втором этапе рассчитывается новое равновесное состояние массива при появлении отверстия, в которое «мгновенно» устанавливается полигональное кольцо (минимальное отставание возведения обделки от забоя выработки). На рис. 1.6 а, б представлены результаты определения вертикальных напряжений σ_y после проходки выработки (рис. 1.6 а), смещений в массиве пород в окрестности выработки (рис. 1.6 б). Из представленных результатов следует, что сооружение выработки вносит изменения в поле напряжений; смещения пород в окрестности выработки незначительны, поэтому деформации массива можно считать упругими. Выработка не оказывает влияния на устойчивость близкорасположенного склона (рис. 1.6 б).

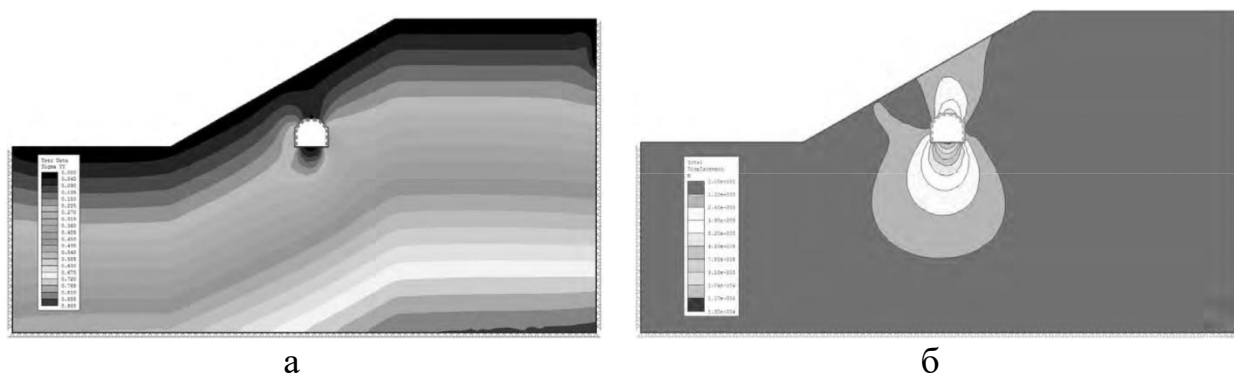


Рисунок 1.6 - Результаты определения напряженно-деформированного состояния массива после проходки выработки: вертикальные напряжения

σ_θ , МПа; б – смещения массива в окрестности выработки δ , м

Максимальные продольные силы в бетонной обделке толщиной 0,1 м достигают 0,09 МН; максимальный момент – $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ МН} \cdot \text{м}$. Запас проч-

ности (отношение эффективных напряжений в элементах к их прочности) во всем массиве выше единицы.

В работе [25] приведены результаты численного моделирования напряженного состояния откоса при проходке горизонтальных выработок квадратного и круглого сечений, ориентированных параллельно фронту откоса. Расчеты выполнены при помощи оригинальных компьютерных программ [158, 159], в которых метод конечных элементов применен к решению первой основной и смешанной задачи теории упругости и теории пластичности.

На рис. 1.7 приведены модель подработанного откоса с углом заложения $\beta = 45^\circ$ (рис. 1.7 а), аппроксимация круглой выработки правильным многоугольником (рис. 1.7 б) и расчетные области пластических деформаций вблизи контура выработки (рис. 1.7 в).

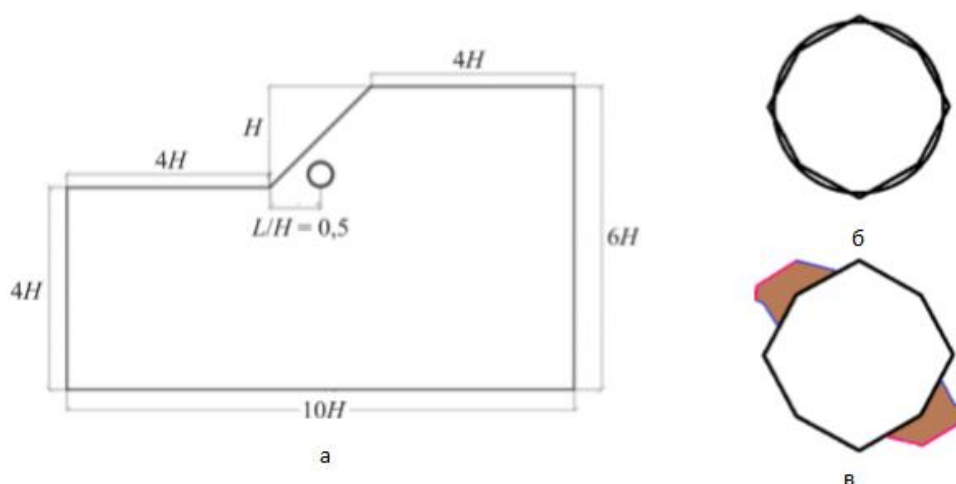


Рисунок 1.7 – Модель подработанного откоса: а - схема с указанием размеров; б - аппроксимация контура выработки многоугольником; в - области неупругих деформаций

Исследовано влияние количества сторон многоугольника, аппроксимирующего круговое поперечное сечение выработки, на значения расчетных напряжений: при увеличении количества сторон многоугольника выше 16, величины напряжений изменяются не более чем на 5%.

В работе представлены изолинии напряжений в массиве в окрестности выработки, и эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ на ее контуре. В качестве количественной меры устойчивости выработки предложено выполнение условий, при которых напряжения σ_θ на контуре выработки не превышают расчетных сопротивлений грунта при растяжении и сжатии. При невыполнении этих условий вокруг выработки возникают увеличивающиеся зоны разрушения грунта, длительная устойчивость выработки не обеспечена.

Установлено расстояние от подошвы откоса до центра выработки, при превышении которого откос не влияет на распределение напряжений в массиве грунта на контуре выработки; представлены зависимости напряжений на контуре выработки от величины коэффициента бокового давления грунта.

Утверждается, что подработка однородного откоса подземной выработкой влечет за собой существенное перераспределение напряжений в массиве, изменение положения и формы наиболее вероятной поверхности скольжения, а также величины коэффициента запаса устойчивости. Для рассмотренных в работе примеров разница величин коэффициентов запаса составляет 13...25%. На процесс перераспределения напряжений в грунтовом массиве значительное влияние оказывают геометрические параметры откоса, форма и размеры выработки, ее положение относительно откоса.

Практика показывает, что достоверность результатов расчета, полученных с использованием специализированных программных комплексов, существенно зависит не только от объективных факторов – адекватных исходных данных, но и от субъективных – квалификации и опыта инженера-расчетчика. Как отмечается в [88], выполнение геотехнических расчетов представляют собой в большей степени искусство, чем решение обычной технической задачи. Формальное применение современных компьютерных технологий и программных комплексов, незнание их специфики в ряде случаев приводят к появлению ошибочных решений.

Применение МКЭ в проектировании подземных сооружений требует решения ряда проблем [98, 131 - 133]: наличие высокой квалификации специалистов, формирующих конечно-элементные схемы (области); зависимость результатов расчетов от размеров рассматриваемой области, типа выбранных элементов и способа закрепления границ; большой объем и высокая трудоемкость работ по подготовке исходных данных для расчета; интерпретация и верификация полученных результатов; выполнение условия повторяемости результатов расчетов, произведенных для одного объекта с использованием различных программ. Таким образом, результаты расчетов, получаемые численными методами с помощью специализированных программ, требуют дополнительной верификации.

В работе [86] на основе численного решения с помощью метода граничных элементов (МГИУ) задачи о подкрепленном отверстии вблизи горизонтальной границы полуплоскости исследовано напряженно-деформированное состояние крепи подземного сооружения при различных расстояниях от поверхности (рис. 1.8).

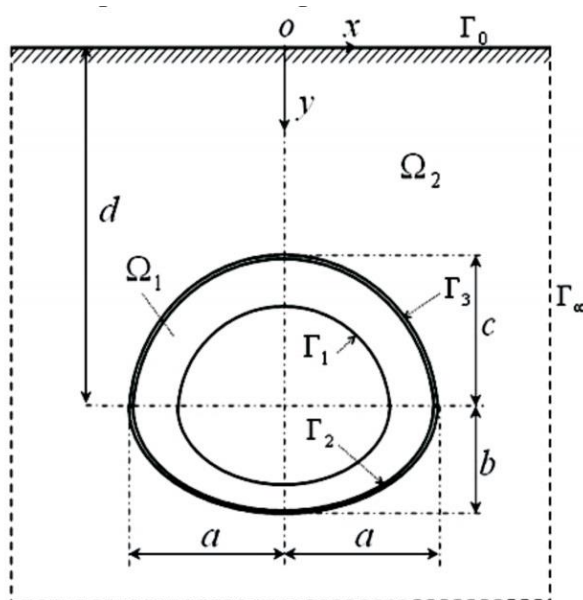


Рисунок 1.8 - Расчетная схема в работе [86]

В качестве внешних нагрузок рассмотрено действие внутреннего равномерного давления и растягивающих напряжений, направленных парал-

лельно границе полуплоскости. Для подкрепленного отверстия в полубесконечной области с учетом заданной нагрузки на участке поверхности полупространства из теоремы о взаимности работ получено тождество Соммильяны. Это уравнение определяет компоненты перемещений точек, расположенных в кольце, упругого полупространства, включая его границу. Контуры расчетных моделей, условий совместности и равновесия на контактной границе представлены дискретно, и на этой основе получена система алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов подтверждают сходимость и точность разработанного алгоритма.

В статье [85] излагается алгоритм численного решения статической задачи о взаимодействии наземного сооружения с упругим полупространством с горизонтальной поверхностью, ослабленным полостью, в условиях плоской деформации. Схема дискретизации приведены на рис. 1.9.

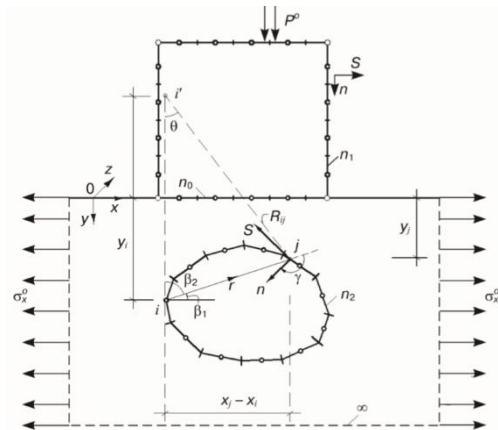


Рисунок 1.9 - Дискретизация границ областей

Применяемый метод [84] позволяет свести задачу к совместному решению трех интегральных уравнений, одно из которых относится к сооружению на поверхности, а два других - к полуплоскости с отверстием. Для решения первого из уравнений используются фундаментальные решения Кельвина, а для второго и третьего - фундаментальные решения Мелана. Каждое из интегральных уравнений преобразуется в соответствующие системы алгеб-

раических уравнений, коэффициенты первой определяются с помощью установленных соотношений. Решение задачи о взаимодействии сооружения с упругим полупространством на основе МГИУ позволяет определить напряженно-деформированное состояние, в том числе - линии наибольших напряжений и деформаций системы «грунт – неподкрепленная выработка» при различных воздействиях. Как отмечают авторы, полученные фундаментальные решения задач позволяют определить напряжения в плоскости с наклонной границей.

Выполняя аналитические исследования с использованием МКЭ, МГИУ, не всегда удастся в постановке задач учесть многообразие и специфику конкретных условий. Поэтому для оценки достоверности принятых расчетных схем и моделей важно сопоставление аналитических результатов с данными инструментальных натурных измерений [1 - 3, 23, 37, 55, 66, 67, 71, 72, 154], выполненных при строительстве тоннелей, лабораторном моделировании [26, 27, 40, 42, 50, 63, 70, 79, 115, 117, 128], а также с результатами расчета обделок тоннелей аналитическими методами, базирующимися на точных решениях задач механики сплошной среды [18, 81, 82, 97, 101, 136].

Прогноз устойчивости выработок и разработка оптимальных конструктивных решений крепей и обделок тоннелей зависит от качества определения напряженно-деформированного состояния конструкций подземных сооружений и массива пород. Очевидно, что измерение напряжений в натурных условиях возможно лишь в отдельных точках массива гор или склонов внутри имеющих выработок. Как указывается в работе [67], в процессе геотехнического мониторинга на этапе строительства подземных сооружений устанавливаются фактические деформационно-прочностные свойства вмещающих грунтов; выполняется оценка качества стабилизации грунтов при использовании специальных способов (замораживания или инъекционного укрепления), устойчивости призабойной части тоннеля; определяется напряженно-деформированное состояние крепи (обделки) тоннеля, конвергенции точек внутреннего контура выработки и осадки дневной поверхности.

Напряженно-деформированное состояние временной крепи, постоянной обделки определяется в результате обработки показаний предварительно установленных датчиков.

В работах [68, 23] приведены результаты натурных измерений напряжений во временной крепи из набрызгбетона при строительстве железнодорожного тоннеля на Северо-Кавказской железной дороге. Отмечается, что будет выполнен большой объем работ по реконструкции существующих и строительству новых транспортных тоннелей, большинство из которых располагаются из-за горного рельефа внутри склонов параллельно их поверхности в сложных инженерно-геологических условиях.

При строительстве первого тоннеля длиной 618 м на участке Туапсе - Адлер выполнялся геотехнический мониторинг, одной из задач которого являлось получение информации о напряженно-деформированном состоянии временной крепи опытного участка. Инструментальные измерения сопровождалась расчетами с применением МКЭ.

На рис. 1.10 показаны поперечное сечение опытного участка (а) и использованная конечно-элементная модель (б).

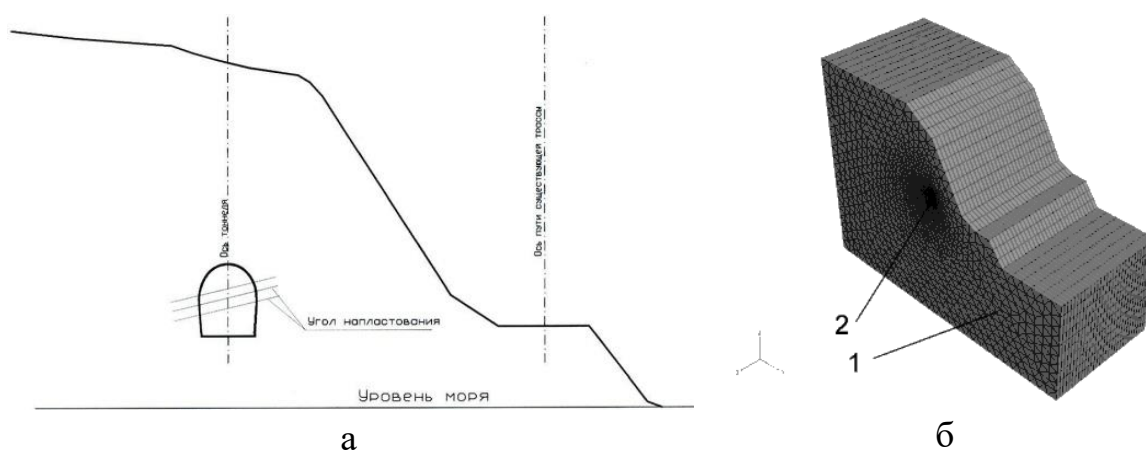


Рисунок 1.10 - Опытный участок тоннеля:

а – поперечное сечение; б – конечно-элементная модель

Проходка тоннеля выполнялась на глубине 40 м уступным способом с последовательной разработкой комбайном калоттной и штроссовой части.

Осадочные горные породы обломочного происхождения представлены переслаивающимися алевролитами, мергелем, песчаниками и аргиллитами с коэффициентами крепости по Протодяконову от 0,8 до 3,0.

Для крепления тоннеля использовался набрызгбетон; на припортальных участках применялась рамная крепь из двутавра с заполнением междрамного пространства тяжелым бетоном. Калотта проходила на всю длину, после чего выполнялась разработка штроссы.

Расположение датчиков для измерения напряжений в крепи, в том числе - в набрызгбетоне, а также датчиков для определения усилий в арматурных стержнях представлено на рис. 1.11 а, б, в.

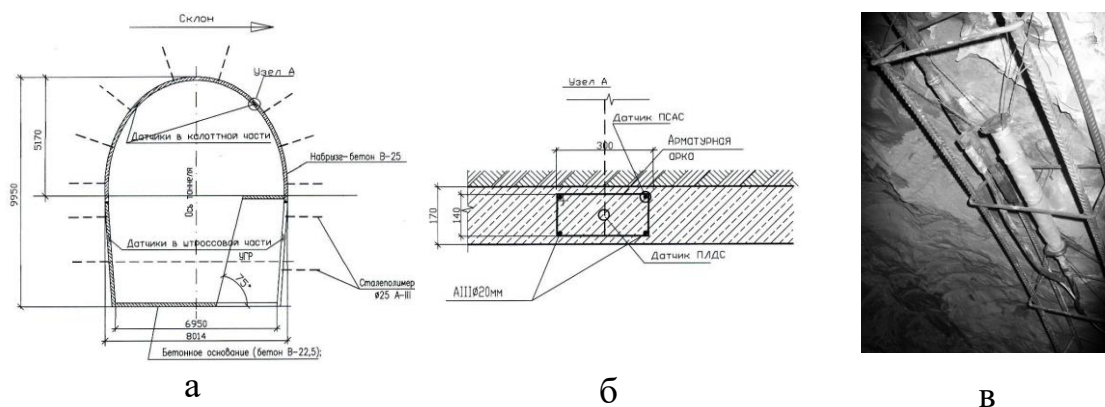


Рисунок 1.11 - Размещение датчиков в крепи тоннеля (а);
в набрызгбетоне (б); в арматурном каркасе до нанесения набрызгбетона (в)

В работе приводятся графики изменения деформаций и напряжений в бетоне по периметру крепи, а также продольных сил в арматуре, полученные по результатам наблюдений. Установлены особенности процесса формирования напряженного состояния крепи, которые свидетельствует о том, что массив пород с нагорной стороны склона сохраняет устойчивость и выполняет функции подпорной стены, а со стороны склона наблюдается увеличение бокового давления, чему способствует изменение угла напластования и увеличение трещиноватости массива. Для упругопластической модели массива пород получена зависимость смещения контура выработки от величины от-

ставания крепления от забоя. Прочность массива оценивалась с использованием критерия Кулона - Мора; крепь считалась упругой.

При конечно-элементных расчетах прочностные параметры горного массива изменялись с фиксированным шагом от значений, при которых происходила потеря устойчивости склона, до значений, при которых пластические деформации в массиве пород невозможны. Полученные результаты использовались при оценке устойчивости склона.

Выполненные расчеты для горно-геологических и технических условий, учитывающих физико-механические свойства массива пород, материалов крепи, технологических этапов раскрытия сечения тоннеля и возведения крепи, показали удовлетворительное согласование. Установлено, что усилия в крепи на всех этапах строительства меньше полученных значений в натуральных условиях на 6...10%. Растягивающие усилия в крепи формируются только на участке перехода калотты в штроссу с нагорной стороны после раскрытия на полное сечение. Расчетные значения смещений контура выработки в своде, в боках с нагорной стороны и со стороны склона соответствуют измеренным. Зона неупругих деформаций вокруг тоннеля не образуется, во всех точках массива горная порода проявляет свойства упругого материала. Для исследования устойчивости склона при проходке тоннеля были смоделированы условия, при малой величине сцепления по контактам напластования. Из расчетов следует, что зоны неупругих деформаций в массиве появляются уже после раскрытия калотты тоннеля. Зоны неупругих деформаций весьма значительны, «прорезают» весь массив и сохраняют свою конфигурацию на всех этапах строительства, что способствует потере устойчивости склона.

При проектировании подземных сооружений нередко применяют результаты лабораторных экспериментов на основе использования метода эквивалентных материалов [27, 42, 55, 70], либо с использованием моделирования взаимодействия элементов геомеханических систем методами фотоупругости [79, 115, 117, 128].

В работе [27] приведены результаты численных и модельных экспериментов по исследованию устойчивости однородного изотропного откоса, подработанного горизонтальной выработкой с круговым поперечным сечением. Лотковые эксперименты проведены на моделях откосов, сформированных из песчано-масляной смеси, физико-механические свойства которой подобны свойствам грунтов.

Формирование модели откоса, связанное с укладкой эквивалентного материала на высоту от дна лотка до «дневной поверхности» модели, выполнялось поэтапно. Модель откоса с полостью формировалась путем извлечения материала из части лотка и короба-шаблона. После этого проводилось фотографирование модели, фиксирующее состояние модели и нарушение ее целостности. Описанная выше процедура проведена для моделей откосов, в которых цилиндрический короб-шаблон, моделирующий выработку, размещался на различных расстояниях от подошвы откоса. Анализ фотографий, сделанных до и после извлечения короба-шаблона, позволил определить расстояния, являющиеся критическими для разрушения выработки и потери устойчивости откоса.

Лабораторные испытания сопровождались расчетами с использованием компьютерных программ, зарегистрированных в Государственном реестре компьютерных программ и баз данных [158, 159].

В работе приведены изолинии расчетных значений относительных горизонтальных, вертикальных и касательных напряжений, области пластических деформаций и следы поверхностей скольжения в откосе.

Анализ результатов показывает, что проходка в однородном откосе горизонтальной выработки вызывает значительные концентрации напряжений в ее окрестности: на ее контуре возникают растягивающие горизонтальные напряжения, которые быстро затухают, что, в свою очередь, способствует образованию вокруг выработки областей пластических деформаций, установленных с помощью критерия Кулона-Мора. Авторами получена удовлетворительная сходимость модельных и численных экспериментов.

Следует отметить, что выполнение подобных экспериментов требуют специализированных лабораторий, соответствующего оборудования и материалов, а также квалифицированных специалистов, обладающих опытом проведения подобных экспериментов. Лабораторные испытания требуют выполнения большого объема подготовительных работ, высоких трудозатрат, отличаются длительностью, возникают проблемы с интерпретацией и повторяемостью результатов, что в конечном итоге ограничивает применение лабораторных исследований при практическом проектировании.

В [76 - 78] приведен обзор работ, посвященных учету влияния гористого рельефа на напряженное состояние массива пород. Отмечается, что для случаев одиночных выступов и выемок в условиях действия гравитационных сил и равномерно распределенных горизонтальных сил тектонического происхождения имеются решения экспериментальные [74], полученные методом конечных элементов [112], а также с использованием математического аппарата ТФКП [19, 99, 100]. А. Надаи [82], рассматривая влияние периодической цепи гор, заменяет их действие периодической системой сил, приложенных к границе горизонтальной дневной поверхности. Такой подход оставляет открытым вопрос о напряженном состоянии участков массива с наклонной границей.

В. Немировский [83] исследовал напряженное состояние массивов пород, представленных периодической системой симметричных гор, в условиях действия только гравитационных сил.

В работе [77] показано, что напряженное состояние пород в окрестности одиночной выработки, размеры которой малы по сравнению с другими особенностями массива (очистные пространства, нарушения сплошности, размеры гор и т. д.), можно рассматривать как напряженное состояние пород вблизи одиночной выработки, располагаемой в пространстве с действующими на бесконечности усилиями, равными по величине и направлению главным напряжениям в исследуемой точке. Автором приводятся результаты определения напряженного состояния массива пород в окрестности одиноч-

ной неподкрепленной выработки сводчатого сечения с учетом влияния гористого рельефа и действия тектонических напряжений. Использовано конформное отображение, приводятся коэффициенты функции, отображающей внешность выработки на внешность единичного круга, а также коэффициенты разложения функций Колосова-Мусхелишвили в ряды Лорана. Результаты расчетов – относительные величины главных напряжений в долях горизонтальной нагрузки – представлены в виде изолиний. Выполнен подробный анализ особенностей формирования напряженного состояния массива.

Жумабаев Б. в работе [51] отмечает проблему, связанную с разработкой физической или численно-дискретной модели подземных сооружений в гористой местности с учетом разномасштабных величин сечений тоннелей и рельефа земной поверхности ($10^{-2} \dots 10^4$ м), что крайне сложно без потери точности критериев подобия. Все это указывает на необходимость привлечения аналитических методов, позволяющих рассматривать как области с конечными, так и с бесконечными размерами. Автором разработаны соответствующие модель и методы оценки напряженно-деформированного состояния массивов пород с горным рельефом вокруг инженерных сооружений, позволяющие повысить обоснованность и надежность принятия проектно-технических решений [52].

Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния массивов пород с горным рельефом включает нахождение в замкнутом виде общих аналитических решений первой и второй основных задач теории упругости для полубесконечных областей с привлечением теории комплексных потенциалов и аппарата конформного отображения. Сложность и многообразие форм рельефа учитывается выбором соответствующих классов полубесконечных областей и подбором, исходя из заданной формы рельефа, параметров отображающих функций – полуплоскость с одним или несколькими вырезами или выступами; полубесконечная область, ограниченная параболическими кривыми и т.д.

В предлагаемой модели используются поля начальных и дополнительных напряжений в массиве, обусловленных массовыми силами и весом наземных объектов, определяемых из решения задачи для полубесконечной области в условиях совместного действия гравитационных, сейсмических и горизонтальных тектонических сил с учетом изотропных и анизотропных упругих свойств пород. Дополнительное поле напряжений описывается соотношениями, полученными с использованием теории функций Колосова-Мусхелишвили. Установлены зоны концентрации напряжений и очаги возможных разрушений массива пород при совместном действии перечисленных выше нагрузок в сопряжениях склонов гор и впадин с их основанием. Получены зависимости коэффициента концентрации напряжений в основании каньона от коэффициента бокового распора, объемного веса пород, интенсивности сейсмических и тектонических сил, параметров анизотропии, угла наклона напластований, крутизны склонов и глубины впадин.

Установлено, что перераспределение напряжений вокруг подземных выработок, обусловленное влиянием горного рельефа, приводит к возникновению растягивающих напряжений, максимальные значения которых локализуются в точках, расположенных по концам хорды контура выработки, параллельной горному склону, их величины возрастают по мере приближения выработки к склону. Сжимающие напряжения локализованы на концах хорды контура выработки, перпендикулярной к склону. Исследовано влияние форм поперечных сечений выработок на напряженное состояние массива пород. Установлено, что устойчивость выработок овальной горизонтально вытянутой формы ухудшается по мере удаления от дневной поверхности, а для вертикально вытянутой формы - по мере ее приближения. В боках выработки с вертикально вытянутой формой, находящейся вблизи поверхности горного склона, возникают значительные растягивающие напряжения. Эпюры напряжений вокруг выработок, расположенных на оси симметрии гор или каньонов (при их наличии), качественно совпадает с распределением напряжений вокруг выработок в равнинной местности, а в других случаях наблю-

дается существенное количественное различие при приближении горной выработки к дневной поверхности склона горы или каньона, достигающее нескольких десятков раз. Разработанные модель и метод прогнозирования напряженного состояния массивов использованы для объектов Рогунской, Камбаратинской и Памирской ГЭС, по трассе туннеля Каинды-Иныльчек для переброски стока реки Сары-Джаз и др.

Работа [46] посвящена вопросам выбора геомеханических моделей породных массивов, определения основных влияющих факторов и систематизации фактических данных о влиянии горного рельефа на напряженно-деформированное состояние подземных сооружений при строительстве шахт Ткибули-Шаорского месторождения, отводящего тоннеля Жинвали ГЭС, а также тоннелей метрополитена г. Тбилиси.

В результате выполненных натурных наблюдений установлено, что в результате влияния наклонной земной поверхности направления действия максимальных нагрузок и перемещений пород отклонены от вертикальной оси выработки в сторону большей концентрации горной массы в структуре гористого рельефа. Утверждается, что причиной деформирования крепи является несовпадение направлений ее максимальной сопротивляемости и податливости направлениям максимальных нагрузок на крепь и максимальных смещений вмещающих пород. Отклонение нагрузок от плоскости поперечного сечения выработки вызывает деформации косого изгиба в крепи, что также приводит к ее разрушению. Установлены условия появления вокруг глубоко расположенных горных выработок областей запредельного деформирования вмещающих пород и обрушения пород кровли.

Для выполнения натурных наблюдений в тоннелях станции «Важа Пшавела» метрополитена г. Тбилиси для разных условиях залегания вмещающих пород были оборудованы комплексные измерительные станции. Данные, полученные с их помощью, позволили определить нагрузки на крепь и ее напряженно-деформированное состояние; несущую способность используемых конструкций после расширения штолен до сечения выработок и воз-

ведения монолитной крепи; смещения в вышележащем массиве; установить границы областей влияния наземных и подземных сооружений. Экспериментальное изучение напряженно-деформированного состояния монолитной крепи подтвердило возникновение на ее внутренней поверхности растягивающих напряжений, не превышающих $3,0 \text{ МПа}$.

Причиной потери устойчивости некоторых участков тоннелей строящегося метрополитена явилось обрушение слабых пород кровли (аргиллиты и алевролиты), наблюдавшееся на одном из участков соединительной штольни из-за появления растягивающих напряжений.

В результате натурных экспериментов установлено, что размеры областей влияния как подземных, так и наземных сооружений по критерию смещений в направлении расположения слоя слабых пород увеличиваются; смещения горных пород при строительстве односводчатой станции (расстояние до свода - $35,5 \text{ м}$) не достигают фундаментов наземных сооружений, а возникающие в обделке напряжения не являются опасными.

Для изучения объемного напряженно-деформированного состояния крепи подземных выработок была разработана программа расчета, реализующая МКЭ. Проведенные расчеты показали, что для достаточно протяженных подземных сооружений, расположение и форма поперечного сечения которых таковы, что напряженное состояние породного массива существенно меняется лишь в плоскости поперечного сечения выработок, а в третьем направлении, совпадающем с продольной осью выработки, эти изменения незначительны, применима плоская расчетная схема. Влияние меняющихся в направлении продольной оси выработки условий на поверхности земли можно учесть эмпирическими коэффициентами концентраций напряжений, вычисляемых с использованием значений напряжений в нетронutom массиве с гористым рельефом и начальных напряжений в том же массиве с горизонтальной поверхностью при действии нагрузок, вызванных наземными сооружениями на поверхности земли, и при незагруженной поверхности.

В работе сформулированы требования к расчетным схемам для различных вариантов расположения выработок и сооружений на поверхности. В основу созданного аналитического (базового) метода расчета положено решение соответствующей задачи теории упругости, для которой формируются дополнительные граничные условия на линии уровня условного основания. Осуществляется переход к граничным условиям краевой задачи ТФКП, записываемым с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [81]. Автором получено общее аналитическое решение задачи для области, изображенной на рис. 1.12, нагруженной сосредоточенными нормальными и касательными силами в точках, являющихся проекциями точек контура выработки на границу полуплоскости.

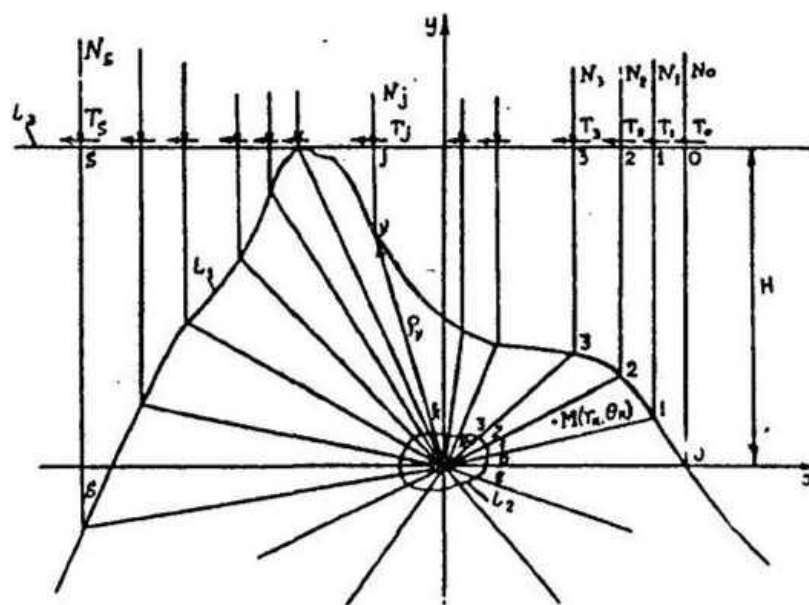


Рисунок 1.12 – Общая расчетная схема подземной выработки в условиях влияния гористого рельефа

Во многих случаях расчетные области породных массивов частично или полностью представлены неупругими горными породами, поэтому возможности разработанного аналитического метода ограничены. Это касается случаев, когда фундаменты наземных сооружений располагаются в пластических грунтах.

Для учета взаимного влияния подземных и наземных сооружений был разработан комбинированный метод расчета, основанный на предложенном базовом аналитическом методе и численном моделировании с помощью МКЭ. Особенностью этого метода расчета является применение к одной расчетной схеме аналитического метода расчета для простой части породного массива, представленной однородными, изотропными и упругими породами, а в локальной области вблизи выработки - МКЭ. Таким образом, исключено влияние граничных условий, сформулированных для граней выделенной локальной области, и, следовательно, устранен один из основных недостатков МКЭ. В качестве локальной области может служить как область массива, примыкающая к фундаментам, если необходимо учесть пластичность основания, так и область, примыкающая к подземному сооружению, если необходимо учесть слоистость, анизотропию и неоднородность вмещающего массива. Исследования показали, что важной особенностью влияния наземных сооружений на подземные выработки являются нарушение симметричности формируемых полей напряжений, изменению направлений главных осей деформаций и напряжений. Установлено, что при ширине подошвы фундамента, меньшей полупролета выработки, и глубине заложения выработки, меньшей величины ее пролета, в окрестности выработки возникают чередующиеся зоны растяжения и сжатия с пиковыми значениями напряжений, приводящими к разрушению пород и увеличению размеров зон обрушения кровли.

Были выполнены лабораторные и натурные исследования по изучению влияния изменений минимального главного напряжения на процесс разрушения образцов горных пород. При большой глубине заложения выработки в гористой местности область его влияния не распространяется до линии уровня условного основания, контур гористого рельефа аппроксимируется линейной функцией.

В конечном итоге были получены формулы для определения компонент напряжений и смещений в процессе деформирования горных пород за пределом прочности для условий плоского напряженного состояния. Уста-

новлено, что в условиях влияния гористого рельефа, как и в условиях влияния наземных сооружений, нарушается симметричность полей напряжений и деформаций вокруг выработки. Это приводит к дополнительной концентрации напряжений в кровле и одной из стенок выработки, в результате одна часть массива вокруг выработки перегружается в 1,5...2,0 раза больше по сравнению с другой, что ухудшает условия ее устойчивости. С увеличением неравномерности строения рельефа указанный эффект усиливается. Достоверность разработанных методов расчета подтверждена удовлетворительной сходимостью результатов с данными натурных исследований и испытаний методом фотоупругости, полученными другими авторами.

В [129] отмечается, что в большинстве работ изучается напряженно-деформированное состояние массивов пород вблизи земной поверхности, мало отличающейся от горизонтальной. Однако результаты теоретических и экспериментальных исследований свидетельствуют о наличии в основаниях высоких склонов концентраций напряжений, которые необходимо учитывать при определении устойчивости подземных выработок.

В основу предлагаемой методики определения полей напряжений в массиве пород вокруг выработок, пройденных в склонах, учитывающей влияние каньонов различных форм (симметричной и несимметричной), плотин и сейсмотектоническую активность горного региона [129, 130], положено аналитическое решение задачи о распределении напряжений в массиве пород вблизи тоннельной выработки, пройденной в склоне, результаты моделирования напряженного состояния горных пород на ЭВМ, анализ и обобщение результатов натурных исследований по определению естественного поля напряжений. Исследовано влияние формы рельефа и места заложения выработки, пройденной в основании глубокого каньона, на напряженное состояние в ее окрестности. Построенная на основе результатов полевых экспериментов модель напряженно-деформированного состояния пород на участках деривационных туннелей Памирской и Кокомеренской ГЭС позволила уста-

новить закономерности распределения напряжений в окрестности выработок, пройденных в склонах.

Исследование напряжений в массивах пород, окружающих выработку, включает определение напряженного состояния массивов, слагающих протяженные горные каньоны с привлечением математического аппарата решения задач теории упругости в плоской постановке и конформного отображения полубесконечной области, соответствующей профилю каньона на полуплоскость; моделирование напряженно-деформированного состояния с помощью МКЭ и уточнение результатов на основе натурных экспериментов.

На примере деривационного туннеля Памирской ГЭС установлено, что при проектном расположении на контуре выработки возникают сжимающие напряжения, максимальные значения которых близки к пределу прочности пород на одноосное сжатие; при некоторых других вариантах расположения на ее контуре возникают растягивающие напряжения. Снижение растягивающих напряжений на контуре выработки для пологих склонов происходит при переносе места заложения выработки в пределах одного горизонта в сторону поверхности, а в случае крутого склона - при переносе выработки в противоположную сторону.

В работе [64] рассмотрена проблема выбора оптимального места заложения выработки в условиях гористого рельефа в анизотропном горном массиве. Используется подход, заключающийся в удовлетворении условия минимальности энергии деформирования вмещающих горных пород с учетом неравномерности распределения напряжений на ее контуре. Оптимальное место заложения выработки в условиях влияния наземных сооружений устанавливается с учетом наименьшей безопасной глубины заложения, определяемой из условия совместной работы системы «крепь - массив - фундамент», обеспечивающей устойчивое состояние как наземного, так и подземного сооружений. Изучение совместной работы системы «крепь - массив» при влиянии гористого рельефа показало, что максимальная несущая способность крепи достигается при расположении узлов податливости в сечениях с

максимальными тангенциальными смещениями вмещающих пород, а шарнирных соединений - в точках пересечения главных осей расчетной области с контуром подземной выработки. Отмечается, что при наличии наземных сооружений уменьшение глубины заложения, и, следовательно, снижение капитальных и эксплуатационных затрат, эффективно достигаются при применении упрочнения и армирования, позволяющих снижать опасные растягивающие напряжения в массиве пород кровли.

Использование современных достижений механики подземных сооружений и геомеханики и компьютерных технологий сделало возможным дальнейшую разработку на единых научных и методологических принципах строгих аналитических методов расчета обделок тоннелей. Выполнение таких работ до недавнего времени сдерживалось отсутствием адекватных математических моделей взаимодействия обделки тоннеля (обделок комплекса тоннелей) с массивом пород как элементов единой деформируемой системы, необходимостью получения решений соответствующих задач механики сплошной среды с применением достаточно сложного математического аппарата, программная реализация методов требовала компьютеров большой мощности.

В Тульском государственном университете на протяжении нескольких десятилетий проводятся исследования, целью которых является развитие теории аналитических методов расчета конструкций подземных сооружений. Разработанные методы базируются на математическом моделировании взаимодействия подземных конструкций с массивом грунта (пород), в том числе - при наличии вокруг тоннелей зон грунта, подверженного предварительному инъекционному укреплению или технологически ослабленного. К настоящему времени с использованием подходов и принципов механики сплошной среды и, в частности, теории упругости, математического аппарата теории функций комплексного переменного (ТФКП) и соответствующего программного обеспечения разработаны аналитические методы, позволяющие выполнять расчеты монолитных бетонных, многослойных, набрызгбетонных в со-

четании с анкерами обделок (крепи) одиночных или испытывающих взаимное влияние тоннелей (горных выработок) глубокого и мелкого заложения на действие статических нагрузок - собственного веса пород; веса объектов, расположенных на земной поверхности; внутреннего напора; веса технологического оборудования и транспортных средств внутри тоннеля; давления подземных вод; тектонических сил и сейсмические воздействия землетрясений [6, 32 - 35, 43, 48, 91, 124 - 126, 138, 145, 147, 148].

В этих методах подземные конструкции рассматриваются как элементы единой деформируемой системы «массив грунта – обделка тоннеля». В их основу положены аналитические решения соответствующих плоских задач теории упругости о равновесии кольца кругового или произвольного поперечного сечения (с одной осью симметрии), подкрепляющего отверстие в весомой (невесомой) однородной изотропной линейно-деформируемой среде.

При расчетах возможен учет особенностей статической работы обделок тоннелей в анизотропном массиве грунта [69], а также приближенный учет вязкоупругого или упругопластического деформирования массива грунта [4] и ряда технологических факторов, оказывающих влияние на напряженно-деформированное состояние подземных конструкций – отставание возведения обделок от забоя; очередность создания слоев в случае, если используются комбинированные или многослойные обделки [6].

Разработанные методы, реализованные в виде соответствующих алгоритмов и компьютерных программ, были апробированы рядом проектных институтов и организаций при проектировании тоннелей различного назначения (транспортных, гидротехнических, коммунальных и др.) и капитальных горных выработок шахт и рудников. Они рекомендуются в качестве базовых методов нормативно-техническими документами [96].

Следует отметить, что к настоящему времени разработаны методы расчета монолитных [58 - 61, 146] и многослойных [56, 102] обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных вблизи склона, не испытывающих влияния других близко расположенных тоннелей.

Аналитические методы по сравнению с расчетом на действие активных нагрузок, либо численными методами [6, 34] обладают следующими преимуществами:

- не требуют априорного задания нагрузок на конструкцию, т.к. нагрузки определяются в процессе единого расчета всей системы вместе с внутренними усилиями в конструкции. Это делает возможным учет влияния на напряженное состояние подземной конструкции ее основных характеристик и параметров, а также собственной несущей способности массива грунта, что приводит к снижению расчетных величин возникающих в конструкции напряжений, а, следовательно, внутренних усилий - изгибающих моментов, продольных и поперечных сил в сечениях конструкций;

- обеспечивают получение более благоприятного расчетного напряженного состояния подземных конструкций по сравнению с расчетом при заданных нагрузках, что позволяет рекомендовать научно обоснованные экономичные технические решения;

- успешно реализуются в виде компьютерных программ, удобных для выполнения многовариантных расчетов при практическом проектировании. Подготовка исходных данных не представляет сложности и не требует значительных временных затрат;

- не требуют высокой квалификации специалиста, выполняющего непосредственный расчет; результаты представляются в виде, удобном для дальнейшей интерпретации или использования при проектировании;

- результаты расчетов обладают свойством повторяемости – получение одинаковых результатов при выполнении расчетов одного объекта с применением различных программ, реализующих разработанные методы;

- результаты расчета удовлетворительно согласуются с данными натурных и лабораторных исследований, а в частных случаях подтверждаются результатами, полученными с использованием других методов.

Следует отметить, что выполненный обзор научной литературы, посвященной вопросам, связанным с темой предстоящего исследования, пока-

зал отсутствие строгого аналитического метода расчета обделок параллельных близко расположенных тоннелей, сооружаемых без вскрытия земной поверхности вблизи склона или в горной местности.

В связи с этим целью диссертационной работы является разработка с использованием теоретических положений, принципов и подходов механики сплошной среды, механики подземных сооружений и геомеханики строгого аналитического метода расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, на действие гравитационных сил в массиве и веса объектов на поверхности.

В основу метода положена идея математического моделирования взаимодействия обделок параллельных тоннелей и массива грунта с наклонной поверхностью как элементов единой деформируемой системы, позволяющего получить решения необходимых задач теории упругости.

Разработанный метод позволяет уточнить известные и установить новые закономерности формирования напряженного состояния обделок параллельных тоннелей при различных сочетаниях основных влияющих факторов с учетом угла наклона земной поверхности и взаимного расположения выработок в комплексе тоннелей.

Для достижения указанной цели в работе поставлены и будут решены следующие задачи исследования:

- обоснование применения основных теоретических положений механики подземных сооружений при рассмотрении совместного деформирования обделок тоннелей, возводимых закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, и окружающего массива грунта [17];

- разработка математической модели формирования напряженного состояния элементов геомеханической системы «массив грунта - наклонная земная поверхность - обделки параллельных тоннелей», учитывающей основные влияющие факторы [11, 122];

- постановка двух плоских задач теории упругости о напряженном состоянии линейно-деформируемой полубесконечной среды, моделирующей массив грунта, ослабленной вблизи наклонной прямолинейной границы произвольно расположенными круговыми отверстиями, подкрепленными концентрическими кольцами из материалов с отличающимися деформационными характеристиками, моделирующими обделки тоннелей, при наличии в среде поля начальных напряжений, обусловленных гравитационными силами, и равномерно распределенной вертикальной нагрузки на поверхности от веса наземных объектов [13, 123];

- переход к соответствующим задачам ТФКП и получение с использованием математического аппарата теории комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили их строгих решений [14];

- разработка алгоритма и метода расчета обделок тоннелей, реализованного в виде программ для персональных компьютеров в среде Microsoft Visual Studio 2012 [121];

- установление в результате компьютерного моделирования новых и уточнение известных закономерностей формирования напряженного состояния обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности.

Выводы

1. Использование метода натурных измерений на подземных объектах, расположенных районах с горным рельефом, затруднено большим объемом предварительных работ по созданию системы мониторинга, продолжительностью выполнения и большим объемом наблюдений, позволяющих достичь необходимую достоверность результатов, надежностью аппаратуры.

2. Применение традиционных инженерных методик, основанных на теоретических положениях строительной механики, к расчету обделок параллельных тоннелей, затруднительно ввиду необходимости априорного

определения нагрузок на конструкции подземных сооружений вблизи склона, невозможностью адекватного учета собственной несущей способности массива грунта и взаимного влияния выработок.

3. Анализ доступных публикаций, содержащих результаты исследований, выполненных на основе численной реализации метода конечных элементов, либо граничных интегральных уравнений, показал отсутствие материалов о напряженно-деформированном состоянии обделок взаимовлияющих параллельных выработок, расположенных вблизи наклонной земной поверхности, опубликованные данные относятся лишь к одиночным тоннелям мелкого заложения, расположенным вблизи горизонтальной земной поверхности.

4. Опубликованные результаты оценки с помощью метода эквивалентных материалов устойчивости откоса, ослабленного одной выработкой, не испытывающей влияния других подземных и наземных объектов, носят качественный характер и их использование при практическом проектировании затруднительно.

5. Установлено отсутствие к настоящему времени аналитического метода расчета обделок параллельных взаимовлияющих тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности, позволяющего эффективно выполнять соответствующие расчеты при практическом проектировании.

6. Подтверждена возможность применения для оценки напряженного состояния протяженных подземных объектов решений плоских задач теории упругости, полученных с помощью математического аппарата теории функций комплексного переменного и потенциалов Колосова-Мусхелишвили.

7. Сформулированы цель и идея работы, задачи исследования.

2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБДЕЛОК ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОННЕЛЕЙ, СООРУЖЕННЫХ ВБЛИЗИ НАКЛОННОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, С МАССИВОМ ГРУНТА

Ниже приведены основные положения, использованные при математическом моделировании взаимодействия монолитных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооружаемых закрытым способом вблизи земной поверхности, имеющей преобладающий угол наклона к горизонту, и массива грунта при действии собственного веса грунта (задача 1), веса объектов на поверхности (задача 2).

2.1 Общая расчетная схема

При математическом моделировании напряженного состояния монолитных обделок участков близко расположенных параллельных тоннелей, сооружаемых закрытым способом вблизи склона, от перечисленных выше статических нагрузок использованы представления геомеханики [113] и механики подземных сооружений о взаимодействии комплекса подземных конструкций и окружающего массива грунта как элементов единой деформируемой системы [6, 34, 126].

В разработанной математической модели учитываются следующие основные факторы, оказывающие влияние на напряженное состояние обделок тоннелей и массива грунта:

- угол наклона поверхности склона к горизонту;
- поле начальных напряжений в массиве, обусловленных гравитационными силами;
- количество параллельных тоннелей;
- взаимное расположение и размеры поперечного сечения тоннелей;
- глубина заложения каждого из тоннелей;
- толщина обделок в каждом из тоннелей;

- деформационные характеристики материалов обделок;
- вес и размеры объектов (зданий, сооружений, транспортных средств и др.) на земной поверхности вблизи тоннелей, а также их расположение относительно комплекса тоннелей;
- реологические свойства грунтов (в рамках теории линейной наследственной ползучести);
- различие в процессе формирования напряженного состояния обделок тоннелей в условиях, когда тоннели сооружаются вблизи уже существующего наземного объекта и когда он возводится после строительства тоннелей;
- последовательность сооружения тоннелей, а также отставание возведения обделок от забоя в каждом из тоннелей.

Поскольку рассматриваются комплексы достаточно протяженных параллельных тоннелей, в математической модели реализована расчетная схема плоской задачи теории упругости, представленная на рис. 2.1.

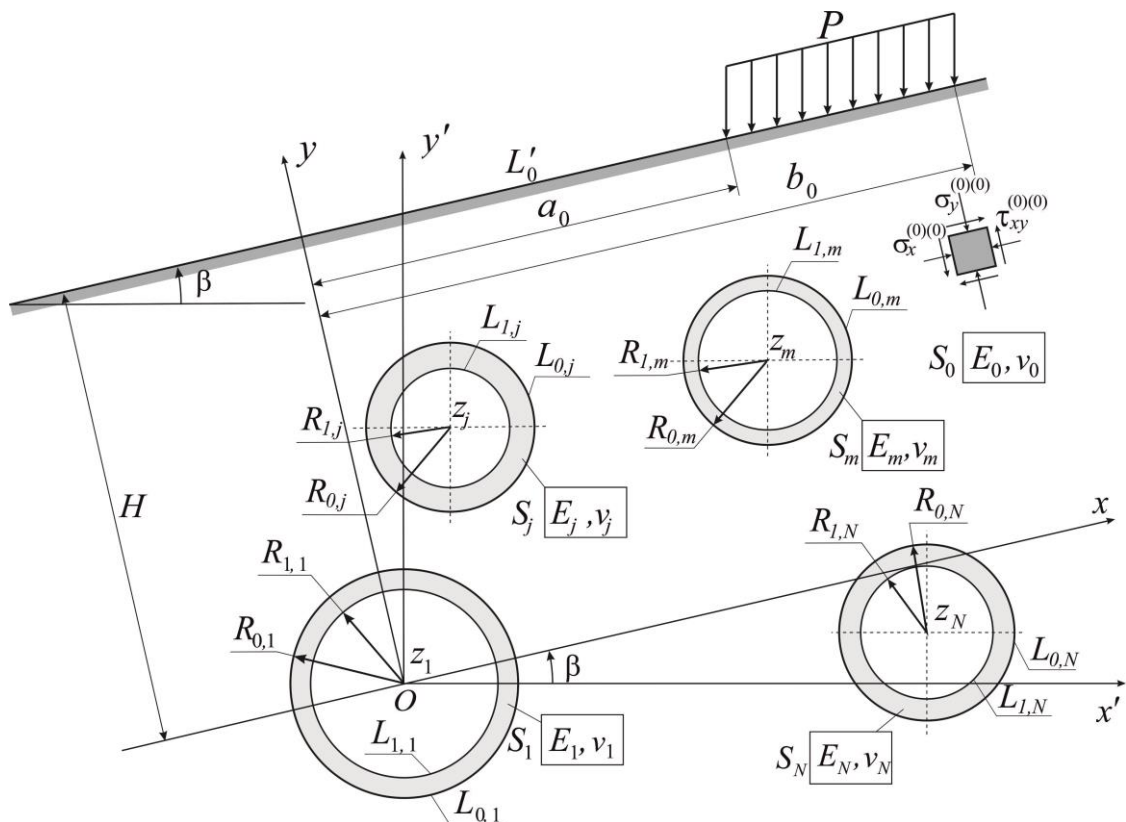


Рисунок 2.1 - Общая расчетная схема

На схеме полубесконечная линейно-деформируемая однородная среда S_0 , моделирующая грунтовый массив, ограничена прямой L'_0 , образующей угол β с горизонталью. Материал среды обладает деформационными характеристиками - модулем деформации E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 .

Среда S_0 ослаблена произвольным числом N круговых отверстий с контурами $L_{0,m}$ радиусами $R_{0,m}$ ($m=1,...,N$), моделирующих поперечные сечения параллельных выработок.

Центры отверстий расположены в точках с координатами $(x'_m; y'_m)$ ($m=1,...,N$) в прямоугольной системе координат $X'OY'$, начало которой совмещено с центром первого отверстия, ось OX' является горизонтальной. Оси OX , OY наклонной системы координат XOY образуют с соответствующими осями OX' , OY' угол β . Таким образом, ось OX параллельна границе полуплоскости.

Поскольку в дальнейшем решения поставленных задач теории упругости будут получены методами теории функций комплексного переменного, под координатами центров отверстий понимаются комплексные числа $z_m = x_m + i y_m$ ($m=1,...,N$) комплексной плоскости.

Отверстия подкреплены концентрическими кольцами S_m с внутренними контурами $L_{1,m}$ радиусами $R_{1,m}$, моделирующими обделки ($m=1,...,N$). Материалы колец S_m имеют деформационные характеристики E_m , ν_m ($m=1,...,N$).

Весом обделок тоннелей по сравнению с весом вмещающего комплекс тоннелей массива грунта пренебрегаем.

Расчетная схема допускает наличие неподкрепленных выработок. Для такой выработки, например, с номером l в расчетной схеме достаточно принять $R_{1,l} = R_{0,l}$, $E_l = E_0$, $\nu_l = \nu_0$.

Среда S_0 и кольца S_m ($m=1,...,N$) во всех задачах деформируются совместно.

В задаче 1 наклонная граница L'_0 полуплоскости свободна от действия внешних сил; в задаче 2 - нагружена равномерно распределенной вертикальной нагрузкой интенсивности P , действующей на участке $[a_0, b_0]$.

В обеих задачах на внутренних контурах $L_{1,m}$ внешние нагрузки отсутствуют.

2.2 Постановка плоской задачи теории упругости о действии собственного веса грунта (задача 1)

Среда S_0 считается весомой с заданным полем начальных напряжений $\sigma_{x'}^{(0)(0)}$, $\sigma_{y'}^{(0)(0)}$, $\tau_{x'y'}^{(0)(0)}$ в системе координат $X'OY'$ (рис. 2.1), моделирующим действие гравитационных сил. В дальнейшем принято, что между горизонтальными и вертикальными напряжениями в ненарушенном массиве грунта выполняется соотношение

$$\sigma_{x'}^{(0)(0)} = \lambda \sigma_{y'}^{(0)(0)}, \quad (2.1)$$

где λ - коэффициент бокового давления, определяемый экспериментально, либо с использованием гипотезы Динника [32].

Компоненты $\sigma_x^{(0)(0)}$, $\sigma_y^{(0)(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)(0)}$ поля начальных напряжений в ненарушенном массиве грунта в наклонной системе координат найдем из решения системы дифференциальных уравнений равновесия [113] для соответствующей плоской задачи теории упругости о весомой полуплоскости с наклонной границей:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(0)(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)(0)}}{\partial y} = -\gamma \sin \beta; \quad \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(0)(0)}}{\partial y} = -\gamma \cos \beta. \quad (2.2)$$

Искомые начальные напряжения в среде S_0 должны удовлетворять

следующим условиям:

- на границе L_0' напряжения $\sigma_x^{(0)(0)}$ и $\tau_{xy}^{(0)(0)}$ отсутствуют

$$\sigma_x^{(0)(0)} \Big|_{y=H} = \tau_{xy}^{(0)(0)} \Big|_{y=H} = 0; \quad (2.3)$$

- в точках любой прямой, параллельной оси OX , напряжения постоянны

$$\sigma_x^{(0)(0)} \Big|_{y<H} = const, \quad \tau_{xy}^{(0)(0)} \Big|_{y<H} = const, \quad (2.4)$$

что означает

$$\frac{\partial \sigma_x^{(0)(0)}}{\partial x} \Big|_{y<H} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)(0)}}{\partial x} \Big|_{y<H} = 0. \quad (2.5)$$

Интегрирование уравнений (2.2) с учетом условий (2.3) - (2.5) приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)(0)} &= -\lambda \gamma (H - y) \cos \beta; \\ \sigma_y^{(0)(0)} &= -\gamma (H - y) \cos \beta; \\ \tau_{xy}^{(0)(0)} &= -\gamma (H - y) \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Полные напряжения $\sigma_x^{(0)*}, \sigma_y^{(0)*}, \tau_{xy}^{(0)*}$ в среде S_0 представляются в виде сумм:

$$\sigma_x^{(0)*} = \sigma_x^{(0)(0)} + \sigma_x^{(0)}; \quad \sigma_y^{(0)*} = \sigma_y^{(0)(0)} + \sigma_y^{(0)}; \quad \tau_{xy}^{(0)*} = \tau_{xy}^{(0)(0)} + \tau_{xy}^{(0)}, \quad (2.7)$$

где $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}$ - искомые дополнительные напряжения в среде S_0 , обусловленные наличием вблизи границы L_0' подкрепленных отверстий.

Начальные напряжения в кольцах S_m ($m=1, \dots, N$) полагаются равными нулю, т.е. весом обделок по сравнению с весом массива грунта пренебрегаем. Таким образом, считается, что в кольцах полные и дополнительные напряжения совпадают. Смещения рассматриваются только дополнительные.

Граничные условия задачи 1 в полных напряжениях примут вид:

- на прямолинейной границе L_0'

$$\sigma_y^* = 0, \tau_{xy}^* = 0; \quad (2.8)$$

- на контурах $L_{0,m}$ ($m = 1, \dots, N$) отверстий

$$\sigma_r^{(1)(m)*} = \sigma_r^{(0)(m)*}, \tau_{r\theta}^{(1)(m)*} = \tau_{r\theta}^{(0)(m)*}, \quad (2.9)$$

$$u^{(1)(m)} = u^{(0)(m)}, v^{(1)(m)} = v^{(0)(m)}; \quad (2.10)$$

- на внутренних контурах $L_{1,m}$ ($m = 1, \dots, N$) колец

$$\sigma_r^{(1)(m)*} = 0, \tau_{r\theta}^{(1)(m)*} = 0, \quad (2.11)$$

где $\sigma_r^{(l)(m)*}, \tau_{r\theta}^{(l)(m)*}$ - соответственно полные радиальные и касательные напряжения, а $u^{(l)(m)}, v^{(l)(m)}$ - компоненты радиальных и окружных дополнительных смещений в точках контуров $L_{l,m}$ ($l = 0, 1; m = 1, \dots, N$) в полярной системе координат.

Влияние на напряженное состояние обделок последовательности проходки тоннелей и отставания их возведения от забоя приближенно учитывается с помощью корректирующих множителей α_m^* ($m = 1, \dots, N$) по методике, изложенной в [6, 126].

Влияние реологических свойств грунта может быть учтено на основе теории линейной наследственной ползучести с использованием метода переменных модулей [4], в котором деформационные характеристики грунта представляются как функции времени.

2.3 Постановка плоской задачи теории упругости о действии веса объектов на поверхности (задача 2)

На участке $a_0 \leq R_{et} \leq b_0$ линии L_0' действует вертикальная равномерно распределенная нагрузка интенсивности P , обусловленная весом объекта на поверхности вблизи комплекса тоннелей.

Среда S_0 , моделирующая массив пород, и кольца S_m ($m=1,...,N$), моделирующие обделки тоннелей, считаются невесомыми, поэтому начальные напряжения в этих областях отсутствуют.

Граничные условия задачи 2 имеют вид:

- на прямолинейной границе L_0'

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } y = H; x < a_0, x > b_0; \\ -P \cos \beta & \text{при } y = H; a_0 \leq x \leq b_0; \end{cases} \\ \tau_{xy}^{(0)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } y = H; x < a_0, x > b_0; \\ -P \sin \beta & \text{при } y = H; a_0 \leq x \leq b_0; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

- на контурах $L_{0,m}$ ($m=1,...,N$)

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)(m)} &= \sigma_r^{(0)(m)}; \tau_{r\theta}^{(1)(m)} = \tau_{r\theta}^{(0)(m)}; \\ u^{(1)(m)} &= u^{(0)(m)}; v^{(1)(m)} = v^{(0)(m)}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

- на контурах $L_{1,m}$ ($m=1,...,N$)

$$\sigma_r^{(1)(m)} = 0; \tau_{r\theta}^{(1)(m)} = 0, \quad (2.14)$$

где $\sigma_y^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$ - нормальные и касательные напряжения в точках границы L_0' ;

$\sigma_r^{(i)(m)}$, $\tau_{r\theta}^{(i)(m)}$, $u^{(i)(m)}$, $v^{(i)(m)}$ - соответственно радиальные и касательные напряжения, радиальные и окружные перемещения точек контуров $L_{i,m}$ ($i = 0, 1; m = 1,..., N$).

Используя постановку задачи о действии одной нагрузки на поверхности, учитывая линейный характер задачи, а также принцип суперпозиции решений, можно определить напряжения от суммарного действия нагрузок, моделирующих действие веса нескольких объектов на поверхности [6].

При моделировании взаимодействия обделок тоннелей с массивом грунта при действии нагрузки на поверхности, как и в работе [6], могут быть рассмотрены два случая. В первом случае нагрузка на участке границы полуплоскости приложена до образования отверстий (тоннели проводятся под уже существующим объектом); во втором - нагрузка действует на участке

границы полуплоскости, ослабленной подкрепленными отверстиями (объект на поверхности возводится после завершения работ по проходке и креплению тоннелей). В первом случае смещения в массиве пород, возникающие до проведения тоннелей, исключаются из граничных условий для перемещений точек контуров $L_{0,m}$ ($m = 1, \dots, N$).

Учет пространственного характера задачи, вызванного конечным размером объекта на поверхности в направлении продольных осей тоннелей, производится по методике, предложенной в [6, 145].

Выводы

1. С использованием теоретических положений геомеханики и механики подземных сооружений выполнено обоснование общей расчетной схемы плоских задач теории упругости, на решениях которых базируется разработанная математическая модель взаимодействия обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона, и окружающего массива грунта как элементов единой деформируемой системы.

2. Определен перечень основных геомеханических, конструктивных и технологических факторов, оказывающих существенное влияние на напряженное состояние обделок тоннелей и окружающего массива грунта, учитываемых при постановках соответствующих задач теории упругости.

3. Выполнены постановки и сформулированы граничные условия двух задач теории упругости о напряженном состоянии полубесконечной линейно-деформируемой однородной весомой среды с наклонной границей, моделирующей грунтовой массив, ослабленной произвольным числом подкрепленных круговых отверстий, моделирующих поперечные сечения параллельных тоннелей, учитывающих действие гравитационных сил от собственного веса грунта и веса объектов на поверхности.

3 РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Аналитический метод расчета обделок параллельных близко расположенных тоннелей кругового поперечного сечения, сооружаемых закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, на действие собственного веса грунта и веса объектов на поверхности базируется на соответствующих решениях плоских задач теории упругости, сформулированных в разделе 2.

Решения задач теории упругости после введения в рассмотрение комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [81, 65] и сведения этих задач к краевым задачам теории аналитических функций комплексного переменного (ТФКП) получены с использованием модифицированного в работах [6, 60, 102, 145] метода Арамановича И.Г. [18].

Отличительной особенностью применения этого метода в данной работе является сведение решения каждой из поставленных задач об определении напряженного состояния колец, подкрепляющих конечное число круговых отверстий в полуплоскости с наклонной границей, к итерационному процессу решения ряда задач о напряженном состоянии кольца, подкрепляющего одно круговое отверстие в полной плоскости при граничных условиях, которые для каждого вида нагружения будут содержать дополнительные члены в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами, отвечающими как за влияние наклонной границы, так и соседних подкрепленных отверстий.

Ниже приведено подробное решение краевой задачи ТФКП, соответствующей задаче о действии собственного веса грунта (задача 1). Решение задачи 2 о действии нагрузки на поверхности базируется на решении, полученном для задачи 1, поэтому будут приведены только положения, отличающиеся от использованных в задаче 1.

3.1 Решение краевой задачи ТФКП, соответствующей задаче о действии собственного веса грунта (задача 1)

Расчетная схема плоской задачи теории упругости для весомой полуплоскости с наклонной границей, ослабленной подкрепленными круговыми отверстиями, сформулированной в п. 2.2, приведена на рис. 3.1.

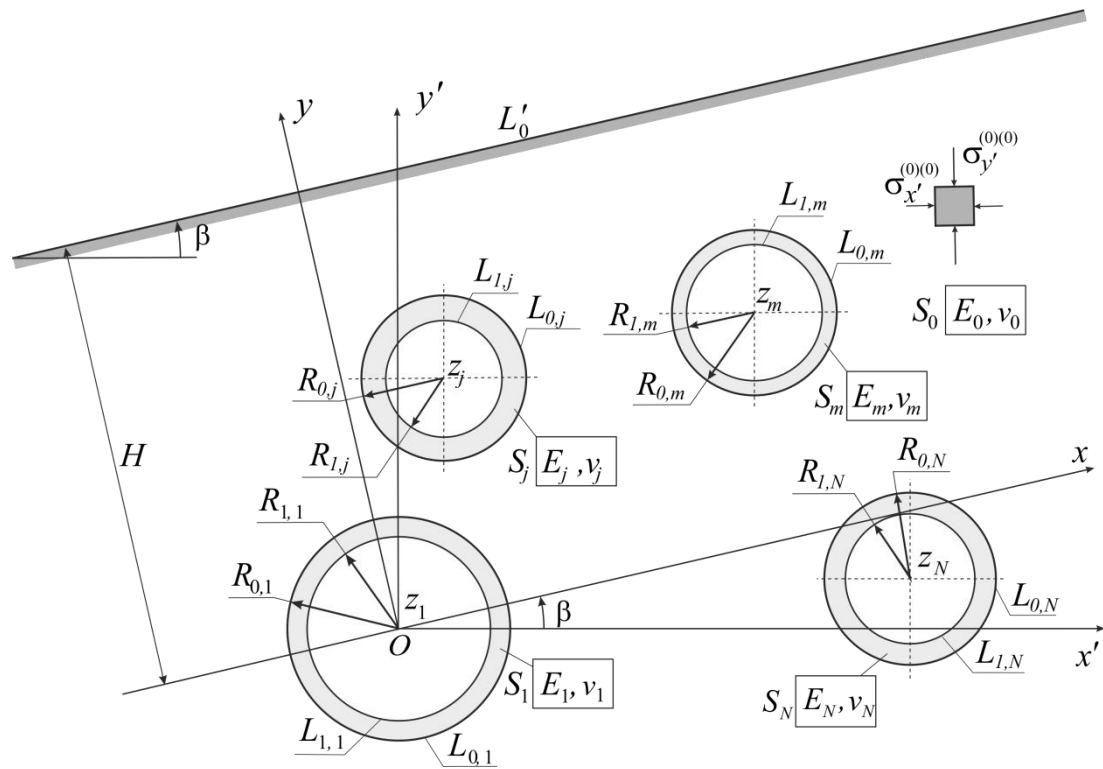


Рисунок 3.1 - Расчетная схема задачи 1

Ниже приведены граничные условия и аналитическое решение соответствующей краевой задачи ТФКП.

3.1.1 Граничные условия краевой задачи ТФКП

Для перехода от плоской задачи теории упругости к соответствующей краевой задаче ТФКП введем в области S_0 , моделирующей массив грунта,

комплексные потенциалы $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, а в областях S_m , моделирующих об-
делки тоннелей, - потенциалы $\tilde{\varphi}_m(z)$, $\tilde{\psi}_m(z)$ ($m=1,...,N$).

Данные функции связаны с напряжениями и смещениями в точках рассматриваемых областей в полярной системе координат известными формулами Колосова - Мусхелишвили [81]:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(l)} + \sigma_\theta^{(l)} &= 4\operatorname{Re}\tilde{\varphi}_l'(z); \\ \sigma_\theta^{(l)} - \sigma_r^{(l)} + 2i\tau_{r\theta}^{(l)} &= 2\left[\bar{z}\tilde{\varphi}_l''(z) + \tilde{\psi}_l'(z)\right]e^{2i\theta}; \\ 2\mu_l\left[u^{(l)} + iv^{(l)}\right] &= \left[\mathfrak{a}_l\tilde{\varphi}_l(z) - z\tilde{\varphi}_l'(z) - \overline{\tilde{\psi}_l'(z)}\right]e^{-i\theta},\end{aligned}\quad (3.1)$$

где $z = x + iy$ - аффиксы точек в областях S_l ($l = 0, 1, ..., N$) соответственно в прямоугольной xOy и полярной $rO\theta$ системах координат; θ - полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки;

$$\mathfrak{a}_l = 3 - 4\nu_l; \quad \mu_l = \frac{E_l}{2(1 + \nu_l)} \quad (l = 0, 1, ..., N). \quad (3.2)$$

Следуя [6], граничные условия соответствующей краевой задачи ТФКП имеют вид ($m = 1, ..., N$):

$$\tilde{\varphi}_0(t_0) + t_0\overline{\tilde{\varphi}_0'(t_0)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_0)} = 0 \quad \text{на } L_0'; \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\varphi}_m(t_{0,m}) + t_{0,m}\overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_m(t_{0,m})} &= \\ &= \tilde{\varphi}_0(t_{0,m}) + t_{0,m}\overline{\tilde{\varphi}_0'(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})} + f_m(t_{0,m}), \\ \mathfrak{a}_m\tilde{\varphi}_m(t_{0,m}) - t_{0,m}\overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_m(t_{0,m})} &= \\ &= \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\mathfrak{a}_0\tilde{\varphi}_0(t_{0,m}) - t_{0,m}\overline{\tilde{\varphi}_0'(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})} \right]; \end{aligned} \right. \quad \text{на } L_{0,m} \quad (3.4)$$

$$\tilde{\varphi}_m(t_{1,m}) + t_{1,m}\overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{1,m})} + \overline{\tilde{\psi}_m(t_{1,m})} = 0 \quad \text{на } L_{1,m}, \quad (3.5)$$

где $t_0 = x + iH$; $t_{n,m} = z_m + R_{n,m}e^{i\theta} = R_{n,m}\sigma$ ($n = 0, 1$; $m = 1, ..., N$), $\sigma = e^{i\theta}$ - точка единичной окружности.

Условие (3.3) отражает отсутствие внешних нагрузок на линии L_0' .

Система уравнений (3.4) определяет непрерывность векторов полных напряжений (первое уравнение) и дополнительных смещений (второе уравнение) на контурах $L_{0,m}$ ($m=1,...,N$). Функции $f_m(t_{0,m})$, входящие в первое уравнение из (3.4), обусловлены наличием в области S_0 поля начальных напряжений и, соответственно, главных векторов усилий, отличных от нуля, действующих на контурах $L_{0,m}$ ($m=1,...,N$), будут определены ниже.

Граничные условия (3.5) свидетельствуют об отсутствии внешних нагрузок на контурах $L_{1,m}$ ($m=1,...,N$).

3.1.2 Определение функций $f_m(t_{0,m})$

Функции $f_m(t_{0,m})$ ($m=1,...,N$) определяются соотношениями [81]:

$$f_m(t_{0,m}) = i \int_0^{t_{0,m}} (X_n^{(0,m)(0)} + iY_n^{(0,m)(0)}) ds_m, \quad (3.6)$$

где $X_n^{(0,m)(0)}$, $Y_n^{(0,m)(0)}$ - компоненты главного вектора усилий на дуге ds_m контура $L_{0,m}$ в среде S_0 , обусловленного наличием начальных напряжений.

Компоненты $X_n^{(0,m)(0)}$, $Y_n^{(0,m)(0)}$ задаются формулами ($m=1,...,N$):

$$\begin{aligned} X_n^{(0,m)(0)} &= \sigma_x^{(0,m)(0)} \cos(n_m, x) + \tau_{xy}^{(0,m)(0)} \cos(n_m, y); \\ Y_n^{(0,m)(0)} &= \tau_{xy}^{(0,m)(0)} \cos(n_m, x) + \sigma_y^{(0,m)(0)} \cos(n_m, y), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\sigma_x^{(0,m)(0)}$, $\sigma_y^{(0,m)(0)}$, $\tau_{xy}^{(0,m)(0)}$ - начальные нормальные и касательные напряжения в точках контуров $L_{0,m}$ в среде S_0 , n_m - внешняя нормаль к дуге ds_m контура $L_{0,m}$ ($m=1,...,N$).

Формулы (2.5) позволяют получить следующие выражения для начальных напряжений в системе координат XOY в точках контуров $L_{0,m}$

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(0,m)(0)} &= -\lambda \gamma R_{0,m} \left(h_m - \frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) \cos \beta; \\
\sigma_y^{(0,m)(0)} &= -\gamma R_{0,m} \left(h_m - \frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) \cos \beta; \\
\tau_{xy}^{(0,m)(0)} &= -\gamma R_{0,m} \left(h_m - \frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) \sin \beta,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$h_m = \frac{H - y_m}{R_{0,m}} = \frac{H_m}{R_{0,m}}; H_m = H - y_m \quad (m = 1, \dots, N). \tag{3.9}$$

При положительном направлении обхода контуров $L_{0,m}$ ($m = 1, \dots, N$) против хода часовой стрелки справедливы соотношения [6]:

$$\cos(n_m, x) = \frac{d(y - y_m)}{ds_m}, \quad \cos(n_m, y) = -\frac{d(x - x_m)}{ds_m} \quad (m = 1, \dots, N). \tag{3.10}$$

Из (3.7) с учетом (3.8) и (3.10) получим

$$X_n^{(0,m)(0)} ds_m = -\gamma R_{0,m}^2 \left(h_m - \frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) \cdot \left[\lambda \cos \beta \cdot d \left(\frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) - \sin \beta \cdot d \left(\frac{x - x_m}{R_{0,m}} \right) \right]; \tag{3.11}$$

$$Y_n^{(0,m)(0)} ds_m = -\gamma R_{0,m}^2 \left(h_m - \frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) \cdot \left[\sin \beta \cdot d \left(\frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) - \cos \beta \cdot d \left(\frac{x - x_m}{R_{0,m}} \right) \right]. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) следует

$$\begin{aligned}
(X_n^{(0,m)(0)} + i Y_n^{(0,m)(0)}) ds_m &= -\gamma R_{0,m}^2 \left(h_m - \frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) \cdot \left[(\lambda \cos \beta + i \sin \beta) \cdot d \left(\frac{y - y_m}{R_{0,m}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - i(\cos \beta - i \sin \beta) \cdot d \left(\frac{x - x_m}{R_{0,m}} \right) \right]. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Для преобразования интеграла (3.6) воспользуемся представлением (3.13) и следующими соотношениями между комплексными величинами

$$\sigma = \frac{t_{0,m} - z_m}{R_{0,m}} = \frac{x - x_m}{R_{0,m}} + i \frac{y - y_m}{R_{0,m}}, \quad \bar{\sigma} = \overline{\frac{t_{0,m} - z_m}{R_{0,m}}} = \frac{x - x_m}{R_{0,m}} - i \frac{y - y_m}{R_{0,m}};$$

$$\frac{x - x_m}{R_{0,m}} = \frac{1}{2}(\sigma + \bar{\sigma}), \quad \frac{y - y_m}{R_{0,m}} = -\frac{i}{2}(\sigma - \bar{\sigma}), \quad \bar{\sigma} = \sigma^{-1}, \quad d\bar{\sigma} = -\sigma^{-2}d\sigma. \quad (3.14)$$

Тогда из (3.6) получим

$$i \int_0^{t_{0,m}} (X_n^{(0,m)(0)} + iY_n^{(0,m)(0)}) ds_m =$$

$$= -\frac{\mathcal{R}_{0,m}^2}{4} \int_0^{t_{0,m}} [2h_m + i(\sigma - \bar{\sigma})] \cdot \left[(1 + \lambda) \cos \beta d\sigma + ((1 - \lambda) \cos \beta - 2i \sin \beta) d\bar{\sigma} \right]. \quad (3.15)$$

На контурах $L_{0,m}$ ($m = 1, \dots, N$) справедливы соотношения

$$\int_0^{t_{0,m}} d\bar{\sigma} = \sigma^{-1}; \quad \int_0^{t_{0,m}} \sigma \cdot d\bar{\sigma} = -\ln \sigma; \quad \int_0^{t_{0,m}} \bar{\sigma} \cdot d\sigma = \ln \sigma, \quad (3.16)$$

которые позволяют выполнить дальнейшие преобразования выражения (3.15)

$$i \int_0^{t_{0,m}} (X_n^{(0,m)(0)} + iY_n^{(0,m)(0)}) ds_m =$$

$$= -\frac{\mathcal{R}_{0,m}^2}{4} \left[-\left(i \cdot \frac{1 - \lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + 4h_m \left(\frac{1 - \lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \right.$$

$$\left. + 4h_m \frac{1 + \lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \cdot \frac{1 + \lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2ie^{-i\beta} \ln \sigma \right]. \quad (3.17)$$

Окончательно для функций $f_m(t_{0,m})$ ($m = 1, \dots, N$) получим выражения

$$f_m(t_{0,m}) = -\frac{\mathcal{R}_{0,m}^2}{4} \left[-\left(i \frac{1 - \lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + 4h_m \left(\frac{1 - \lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \right.$$

$$\left. + 4h_m \frac{1 + \lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \frac{1 + \lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2ie^{-i\beta} \ln \sigma \right]. \quad (3.18)$$

3.1.3 Преобразованные граничные условия

Граничные условия (3.3) - (3.5) с учетом (3.18) запишем в виде:

- на линии L_0'

$$\tilde{\varphi}_0(t_0) + t_0 \overline{\tilde{\varphi}_0'(t_0)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_0)} = 0; \quad (3.19)$$

- на контурах $L_{0,m}$ ($m = 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_m(t_{0,m}) + t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_m(t_{0,m})} = \tilde{\varphi}_0(t_{0,m}) + t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}_0'(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})} - \\ - \frac{\gamma R_{0,m}^2}{4} \left[- \left(i \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + 4h_m \left(\frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \right. \\ \left. + 4h_m \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2ie^{-i\beta} \ln \sigma \right]; \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_m \tilde{\varphi}_m(t_{0,m}) - t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_m(t_{0,m})} = \\ = \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\mathfrak{a}_0 \tilde{\varphi}_0(t_{0,m}) - t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}_0'(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})} \right]; \quad (3.21) \end{aligned}$$

- на контурах $L_{1,m}$ ($m = 1, \dots, N$)

$$\tilde{\varphi}_m(t_{1,m}) + t_{1,m} \overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{1,m})} + \overline{\tilde{\psi}_m(t_{1,m})} = 0. \quad (3.22)$$

Потенциалы $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, регулярные в области S_0 вне отверстий, ограниченных контурами $L_{0,j}$ ($j = 1, \dots, N$), с учетом неинвариантности функции $\tilde{\psi}_0(z)$ при переносе начала координат представляются следующими суммами [6]

$$\tilde{\varphi}_0(z) = \sum_{j=1}^N [\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)], \quad \tilde{\psi}_0(z) = \sum_{j=1}^N [\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) - \overline{z_j} \tilde{\varphi}_{0,j}'(z - z_j)], \quad (3.23)$$

где $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ - функции, регулярные в области S_0 вне каждого из отверстий с контурами $L_{0,j}$ ($j = 1, \dots, N$).

Потенциалы $\tilde{\varphi}_m(z)$, $\tilde{\psi}_m(z)$, регулярные в кольцах S_m ($m=1, \dots, N$), с учетом неинвариантности функций $\tilde{\psi}_m(z)$ представляются в виде

$$\tilde{\varphi}_m(z) = \varphi_m(z - z_m), \quad \tilde{\psi}_m(z) = \psi_m(z - z_m) - \bar{z}_m \varphi_m'(z - z_m), \quad (3.24)$$

где функции $\varphi_m(z - z_m)$, $\psi_m(z - z_m)$ являются регулярными в кольцах S_m ($m=1, \dots, N$).

Тогда с учетом (3.23), (3.24) граничные условия (3.19) - (3.22) приобретают вид ($m=1, \dots, N$):

- на линии L_0' ($t_0 = x + iH$)

$$\sum_{j=1}^N \left[\tilde{\varphi}_{0,j}(t_0 - z_j) + (t_0 - z_j) \overline{\tilde{\varphi}_{0,j}'(t_0 - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_0 - z_j)} \right] = 0; \quad (3.25)$$

- на контурах $L_{0,m}$ ($t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$)

$$\begin{aligned} & \varphi_m(t_{0,m} - z_m) + (t_{0,m} - z_m) \overline{\varphi_m'(t_{0,m} - z_m)} + \overline{\psi_m(t_{0,m} - z_m)} = \\ & = \sum_{j=1}^N \left[\tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) + (t_{0,m} - z_j) \overline{\tilde{\varphi}_{0,j}'(t_{0,m} - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)} \right] - \\ & - \frac{\gamma R_{0,m}^2}{4} \left[- \left(i \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + 4h_m \left(\frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \right. \\ & \left. + 4h_m \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2ie^{-i\beta} \ln \sigma \right]; \quad (3.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{a}_m \varphi_m(t_{0,m} - z_m) - (t_{0,m} - z_m) \overline{\varphi_m'(t_{0,m} - z_m)} - \overline{\psi_m(t_{0,m} - z_m)} = \\ & = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[\mathfrak{a}_0 \tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) - (t_{0,m} - z_j) \overline{\tilde{\varphi}_{0,j}'(t_{0,m} - z_j)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)} \right], \quad (3.27) \end{aligned}$$

- на контурах $L_{1,m}$ ($t_{1,m} = z_m + R_{1,m}\sigma$)

$$\varphi_m(t_{1,m} - z_m) + (t_{1,m} - z_m) \overline{\varphi_m'(t_{1,m} - z_m)} + \overline{\psi_m(t_{1,m} - z_m)} = 0. \quad (3.28)$$

3.1.4 Определение главных векторов усилий на контурах отверстий

Главные векторы усилий на контурах $L_{0,j}$ ($j=1,...,N$) определяются из следующих соотношений

$$X^{(0,j)(0)} + iY^{(0,j)(0)} = \oint_{L_{0,j}} \left(X_n^{(0,j)(0)} + iY_n^{(0,j)(0)} \right) ds_j. \quad (3.29)$$

Из (3.17) с учетом $t_{0,j} = z_j + R_{0,j}\sigma$ следует

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{0,j}} \left(X_n^{(0,j)(0)} + iY_n^{(0,j)(0)} \right) ds_j = \\ = i \frac{\gamma R_{0,j}^2}{4} \left[- \left(i \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + 4h_j \left(\frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + \right. \\ \left. + 4h_j \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2ie^{-i\beta} \ln \sigma \right]. \quad (3.30) \end{aligned}$$

Интегралы по замкнутому контуру от аналитических функций, в том числе – от σ^{-2} , σ^{-1} , σ , σ^2 , входящих в (3.30), равны нулю; функция $\ln \sigma$ при положительном обходе контура $L_{0,m}$ приобретает приращение $2\pi i$.

Тогда главные векторы усилий на контурах $L_{0,m}$ ($m=1,...,N$) равны

$$X^{(0,j)(0)} + iY^{(0,j)(0)} = \frac{\gamma R_{0,j}^2}{2} e^{-i\beta} 2\pi i = 2\pi K_j, \quad (3.31)$$

где

$$K_j = \frac{\gamma R_{0,j}^2}{2} e^{-i\beta}. \quad (3.32)$$

3.1.5 Представления комплексных потенциалов

Функции $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$, регулярные в полуплоскости вне каждого из контуров $L_{0,j}$ ($j = 1, \dots, N$), с учетом наличия на этих контурах отличных от нуля главных векторов усилий представляются в виде [81, 6]

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j) &= \varphi_{0,j}^*(z - z_j) - \frac{X^{(0,j)(0)} + iY^{(0,j)(0)}}{2\pi(1 + \alpha_0)} \left[\ln(z - z_j) + \alpha_0 \ln(z - z_j - 2iH_j) \right]; \\ \tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) &= \psi_{0,j}^*(z - z_j) + \frac{X^{(0,j)(0)} - iY^{(0,j)(0)}}{2\pi(1 + \alpha_0)} \left[\alpha_0 \ln(z - z_j) + \ln(z - z_j - 2iH_j) \right],\end{aligned}\quad (3.33)$$

где $\varphi_{0,j}^*(z - z_j)$, $\psi_{0,j}^*(z - z_j)$ - комплексные потенциалы, регулярные в области S_0 вне контуров $L_{0,j}$ ($j = 1, \dots, N$), включая бесконечно удаленную точку.

Из (3.31) следует

$$X^{(0,j)(0)} - iY^{(0,j)(0)} = -2\pi i \overline{K_j} \quad (j = 1, \dots, N). \quad (3.34)$$

С учетом (3.31), (3.34) представления потенциалов $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ ($j = 1, \dots, N$) перепишем в виде

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j) = \varphi_{0,j}^*(z - z_j) - \frac{iK_j}{1 + \alpha_0} \left[\ln(z - z_j) + \alpha_0 \ln(z - z_j - 2iH_j) \right]; \quad (3.35)$$

$$\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) = \psi_{0,j}^*(z - z_j) - \frac{iK_j}{1 + \alpha_0} \left[\alpha_0 \ln(z - z_j) + \ln(z - z_j - 2iH_j) \right]. \quad (3.36)$$

3.1.6 Аналитическое продолжение потенциалов через границу полуплоскости

Выполним аналитическое продолжение функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ через прямолинейную границу L_0' в верхнюю полуплоскость $\hat{S}$, дополняющую область S_0 до полной плоскости, ослабленной отверстиями.

Из условия (3.25) на линии L_0' и постановки задачи следует справедливость соотношений

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(t_0 - z_j) + (t_0 - z_j) \overline{\tilde{\varphi}_{0,j}'(t_0 - z_j)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,j}(t_0 - z_j)} = 0 \quad (j=1, \dots, N). \quad (3.37)$$

После преобразований (3.37), аналогичных приведенным в [6], получим

$$\begin{aligned} \varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) + (t_0 - z_j) \overline{\varphi_{0,j}^{*'}(t_0 - z_j)} + \overline{\psi_{0,j}^*(t_0 - z_j)} = \\ = \frac{iK_j}{1 + \alpha_0} \left(\ln \frac{t_0 - z_j}{t_0 - z_j - 2iH_j} + \alpha_0 \ln \frac{t_0 - z_j - 2iH_j}{t_0 - z_j} \right) - \\ - \frac{i\overline{K_j}}{1 + \alpha_0} \left(\frac{t_0 - z_j}{t_0 - z_j} + \alpha_0 \frac{t_0 - z_j}{t_0 - z_j - 2iH_j} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

На границе L_0' выполняются соотношения

$$\overline{t_0 - z_j} = t_0 - z_j - 2iH_j. \quad (3.39)$$

Тогда будут справедливы следующие тождества и представления

$$\ln \frac{t_0 - z_j}{t_0 - z_j - 2iH_j} = 0; \quad \ln \frac{t_0 - z_j - 2iH_j}{t_0 - z_j} = 0; \quad \frac{t_0 - z_j}{t_0 - z_j - 2iH_j} = 1 + \frac{2iH_j}{t_0 - z_j - 2iH_j}. \quad (3.40)$$

Из выражения (3.38) с учетом (3.40) и после исключения констант в правой части, не требующихся согласно формулам Колосова-Мусхелишвили (3.1) при определении напряжений, получим ($j=1, \dots, N$)

$$\varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) + (t_0 - z_j) \overline{\varphi_{0,j}^{*'}(t_0 - z_j)} + \overline{\psi_{0,j}^*(t_0 - z_j)} = \frac{2\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}, \quad (3.41)$$

где введено обозначение

$$K_j^* = \frac{K_j H_j}{1 + \alpha_0}. \quad (3.42)$$

Введем, как и в [6], вспомогательные функции $\omega_j(t_0 - z_j)$

$$\varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) - (t_0 - z_j) \overline{\varphi_{0,j}^{*'}(t_0 - z_j)} - \overline{\psi_{0,j}^*(t_0 - z_j)} = 2\omega_j(t_0 - z_j). \quad (3.43)$$

В результате сложения выражений (3.41) и (3.43) получим ($j=1,...,N$)

$$\varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) = \omega_j(t_0 - z_j) + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}. \quad (3.44)$$

После вычитания из (3.41) выражения (3.43) имеем

$$(t_0 - z_j)\overline{\varphi_{0,j}^{*'}} + \overline{\psi_{0,j}^*}(t_0 - z_j) = -\omega_j(t_0 - z_j) + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}. \quad (3.45)$$

Из (3.45) с учетом (3.44) получим

$$\overline{\psi_{0,j}^*}(t_0 - z_j) = -\omega_j(t_0 - z_j) - (t_0 - z_j)\overline{\omega_j'}(t_0 - z_j) + \frac{K_j^*}{t_0 - z_j} + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}, \quad (3.46)$$

откуда

$$\psi_{0,j}^*(t_0 - z_j) = -\overline{\omega_j(t_0 - z_j)} - \overline{(t_0 - z_j)\omega_j'}(t_0 - z_j) + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j} + \frac{K_j^*}{t_0 - z_j}. \quad (3.47)$$

Для функций $\omega_j(z - z_j)$ ($j=1,...,N$) на границе L_0' областей S_0 и $\hat{S}$, т.е. при $z = t_0 = x + iH$, справедливы представления [6]

$$\omega_j(t_0 - z_j) = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \hat{S}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau. \quad (3.48)$$

Из (3.48) с учетом свойств интегралов типа Коши [81] следует

$$\overline{\omega_j(t_0 - z_j)} = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \hat{S}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)}}{\tau - z} d\tau - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)}}{\tau - z} d\tau; \quad (3.49)$$

$$\omega_j'(t_0 - z_j) = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \hat{S}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau. \quad (3.50)$$

Подставляя в соотношения (3.44) выражения (3.48), а в (3.47) - выражения (3.49) и (3.50), будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \hat{S}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau + \\ + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}; \quad (3.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{0,j}^*(t_0 - z_j) = - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \hat{S}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)} + (t_0 - z_j)\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau + \\ + \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)} + (t_0 - z_j)\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j} + \frac{K_j^*}{t_0 - z_j}. \quad (3.52) \end{aligned}$$

Поскольку функции $\frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}$ регулярны в области S_0 , выражение (3.51) перепишем в виде ($j=1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) + \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau - \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j} = \\ = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \hat{S}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau. \quad (3.53) \end{aligned}$$

Поскольку функции $\frac{K_j^*}{t_0 - z_j}$ регулярны в области $\hat{S}$, то выражение (3.52) запишем в виде ($j=1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \psi_{0,j}^*(t_0 - z_j) - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in S_0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)} + (t_0 - z_j)\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau - \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j} = \\ = - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \hat{S}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)} + (t_0 - z_j)\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau + \frac{K_j^*}{t_0 - z_j}. \quad (3.54) \end{aligned}$$

На основе формул Сохоцкого-Племеля, как и в работе [6], функции $\varphi_{0,j}(z - z_j)$, $\psi_{0,j}(z - z_j)$, регулярные в полной плоскости $S_0 + \hat{S}$ вне отверстия с номером j ($j = 1, \dots, N$), определяются следующим образом:

$$\varphi_{0,j}(z - z_j) = \begin{cases} \varphi_{0,j}^*(z - z_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau - \frac{\overline{K_j^*}}{z - z_j - 2iH_j}, & z \in S_0; \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau, & z \in \hat{S} \end{cases} \quad (3.55)$$

$$\psi_{0,j}(z - z_j) = \begin{cases} \psi_{0,j}^*(z - z_j) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)} + (z - z_j)\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau - \\ - \frac{\overline{K_j^*}}{z - z_j - 2iH_j}, & z \in S_0; \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)} + (z - z_j)\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau + \frac{K_j^*}{z - z_j}, & z \in \hat{S}. \end{cases} \quad (3.56)$$

Введенные соотношениями (3.55), (3.56) функции $\varphi_{0,j}(z - z_j)$, $\psi_{0,j}(z - z_j)$ выполняют аналитические продолжения соответственно функций $\varphi_{0,j}^*(z - z_j)$, $\psi_{0,j}^*(z - z_j)$ ($j = 1, \dots, N$) в верхнюю полуплоскость $\hat{S}$. Следовательно, функции $\varphi_{0,j}(z - z_j)$, $\psi_{0,j}(z - z_j)$ являются регулярными в полной плоскости вне контуров отверстий $L_{0,j}$ ($j = 1, \dots, N$).

Из (3.55), (3.56) получим выражения для функций $\varphi_{0,j}^*(z - z_j)$, $\psi_{0,j}^*(z - z_j)$, регулярных в области S_0 вне контуров $L_{0,j}$ ($j = 1, \dots, N$):

$$\varphi_{0,j}^*(z - z_j) = \varphi_{0,j}(z - z_j) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau + \frac{\overline{K_j^*}}{z - z_j - 2iH_j}, \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0,j}^*(z - z_j) = \psi_{0,j}(z - z_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)} + \overline{(z - z_j)} \omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - z} d\tau + \\ + \frac{\overline{K_j^*}}{z - z_j - 2iH_j}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Для определения вспомогательных функций $\omega_j(z - z_j)$ ($j=1, \dots, N$), следуя Арамановичу И.Г. [18], воспользуемся соотношениями (3.43).

Формулы Сохоцкого-Племеля [81] позволяют записать предельные значения функций $\varphi_{0,j}^*(z - z_j)$, $\psi_{0,j}^*(z - z_j)$, определяемых (3.57), (3.58), на контуре L_0' при $z \rightarrow t_0$ ($z \in S_0$, $t_0 = x + iH_j$) при направлении обхода L_0' слева направо ($j=1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) = \varphi_{0,j}(t_0 - z_j) + \frac{1}{2} \omega_j(t_0 - z_j) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - t_0} d\tau + \\ + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0,j}^*(t_0 - z_j) = \psi_j(t_0 - z_j) - \frac{1}{2} \left[\overline{\omega_j(t_0 - z_j)} + \overline{(t_0 - z_j)} \omega_j'(t_0 - z_j) \right] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)} + \overline{(t_0 - z_j)} \omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - t_0} d\tau + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Из формулы (3.59) с учетом свойств интегралов типа Коши следует

$$\begin{aligned} \varphi_{0,j}^{*'}(t_0 - z_j) = \varphi_{0,j}'(t_0 - z_j) + \frac{1}{2} \omega_j'(t_0 - z_j) - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\omega_j'(\tau - z_j)}{\tau - t_0} d\tau - \frac{\overline{K_j^*}}{(t_0 - z_j - 2iH_j)^2}; \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\overline{\varphi_{0,j}^{*'}(t_0 - z_j)} = \overline{\varphi_{0,j}'(t_0 - z_j)} + \frac{1}{2} \overline{\omega_j'(t_0 - z_j)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j'(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\tau - \frac{\overline{K_j^*}}{(t_0 - z_j)^2}; \quad (3.62)$$

$$\overline{\psi_{0,j}^*(t_0 - z_j)} = \overline{\psi_j(t_0 - z_j)} - \frac{1}{2} \left[\overline{\omega_j(t_0 - z_j) + (t_0 - z_j) \omega_j'(t_0 - z_j)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j) + (t_0 - z_j) \omega_j'(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\tau + \frac{K_j^*}{t_0 - z_j}. \quad (3.63)$$

Подставив выражения (3.58), (3.62), (3.63) в формулу (3.43), получим

$$2\omega_j(t_0 - z_j) = \varphi_{0,j}(t_0 - z_j) - \overline{(t_0 - z_j) \varphi_{0,j}'(t_0 - z_j)} - \overline{\psi_{0,j}(t_0 - z_j)} +$$

$$+ \overline{\omega_j(t_0 - z_j)} + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\tau -$$

$$- (t_0 - z_j) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j'(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\bar{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j) + (t_0 - z_j) \omega_j'(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\bar{\tau}. \quad (3.64)$$

После приведения в (3.64) подобных членов имеем:

$$\omega_j(t_0 - z_j) = \varphi_{0,j}(t_0 - z_j) - \overline{(t_0 - z_j) \varphi_{0,j}'(t_0 - z_j)} - \overline{\psi_{0,j}(t_0 - z_j)} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0'} \overline{\omega_j(\tau - z_j)} \left(\frac{d\tau}{\tau - t_0} - \frac{d\bar{\tau}}{\tau - t_0} \right) + \frac{\overline{K_j^*}}{t_0 - z_j - 2iH_j}. \quad (3.65)$$

На прямолинейной границе L_0' справедливо

$$\tau - t_0 = \overline{\tau - t_0}, \quad \frac{d\tau}{\tau - t_0} - \frac{d\bar{\tau}}{\tau - t_0} = 0, \quad (3.66)$$

поэтому соотношение (3.65) примет вид

$$\omega_j(t_0 - z_j) = \varphi_{0,j}(t_0 - z_j) - \overline{(t_0 - z_j) \varphi_{0,j}'(t_0 - z_j)} -$$

$$- \overline{\psi_{0,j}(t_0 - z_j)} + \overline{K_j^*} (t_0 - z_j - 2iH_j)^{-1}. \quad (3.67)$$

Преобразуем (3.67)

$$\omega_j(t_0 - z_j) = \varphi_{0,j}(t_0 - z_j) - \overline{(t_0 - z_j) \varphi_{0,j}'(t_0 - z_j - 2iH_j)} -$$

$$- \overline{\psi_{0,j}(t_0 - z_j - 2iH_j)} + \overline{K_j^*} (t_0 - z_j - 2iH_j)^{-1}. \quad (3.68)$$

Из (3.68) следует

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_j(t_0 - z_j) = \dot{\varphi}_{0,j}(t_0 - z_j) - \overline{\dot{\varphi}_{0,j}}(t_0 - z_j - 2iH_j) - (t_0 - z_j) \overline{\dot{\varphi}_{0,j}}(t_0 - z_j - 2iH_j) - \\ - \overline{\dot{\psi}_{0,j}}(t_0 - z_j - 2iH_j) - \overline{K_j^*}(t_0 - z_j - 2iH_j)^{-2}; \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \overline{\dot{\omega}_j(t_0 - z_j)} = \overline{\dot{\varphi}_{0,j}}(t_0 - z_j - 2iH_j) - \overline{(t_0 - z_j)} \dot{\varphi}_{0,j}(t_0 - z_j) - \dot{\psi}_{0,j}(t_0 - z_j) + \\ + K_j^*(t_0 - z_j)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Для вычисления интегралов типа Коши, входящих в (3.55), (3.56), воспользуемся формулой Коши [81]: если некоторая функция $F(z)$ регулярна в области S_0 , включая границу L_0 , и обращается в ноль на бесконечности, т.е. $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$, то выполняется

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} -F(z), & \text{если } z \in S_0; \\ 0, & \text{если } z \in \hat{S}, \end{cases} \quad (3.71)$$

если функция $F(z)$ регулярна в области $\hat{S}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{F(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} F(z), & \text{если } z \in \hat{S}; \\ 0, & \text{если } z \in S_0. \end{cases} \quad (3.72)$$

Учитывая, что функции $\varphi_{0,j}(z - z_j)$, $\dot{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\psi_{0,j}(z - z_j)$ ($j = 1, \dots, N$) регулярны в области $\hat{S}$, т.е. в верхней полуплоскости, и обращаются в ноль на бесконечности, а функции $\overline{\varphi_{0,j}}(z - z_j - 2iH_j)$, $\overline{\dot{\varphi}_{0,j}}(z - z_j - 2iH_j)$, $\overline{\psi_{0,j}}(z - z_j - 2iH_j)$, $\overline{\dot{\psi}_{0,j}}(z - z_j - 2iH_j)$, $(z - z_j - 2iH_j)^{-1}$ ($j = 1, \dots, N$) регулярны в области S_0 , т.е. в нижней области, используя представление функций $\omega_j(t_0 - z_j)$ в виде (3.68), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - t_0} d\tau = (t_0 - z_j) \dot{\varphi}_{0,j}(t_0 - z_j - 2iH_j) + \overline{\dot{\psi}_{0,j}}(t_0 - z_j - 2iH_j) - \\ - \overline{K_j^*}(t_0 - z_j - 2iH_j)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\tau = -\overline{\varphi_{0,j}(t_0 - z_j - 2iH_j)}, \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{(t_0 - z_j)\omega_j'(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\tau &= (t_0 - z_j - 2iH_j)\overline{\varphi_{0,j}'(t_0 - z_j - 2iH_j)} + \\ &+ (t_0 - z_j)(t_0 - z_j - 2iH_j)\overline{\varphi_{0,j}''(t_0 - z_j - 2iH_j)} + \\ &+ (t_0 - z_j - 2iH_j)\overline{\psi_{0,j}'(t_0 - z_j - 2iH_j)} + \overline{K_j^*}(t_0 - z_j - 2iH_j)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Функции $\varphi_{0,j}(z - z_j)$, $\psi_{0,j}(z - z_j)$, регулярные в полной плоскости

$S_0 + \hat{S}$ вне контуров $L_{0,j}$, будем отыскивать в виде рядов ($j = 1, \dots, N$)

$$\varphi_{0,j}(z - z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k}, \quad \psi_{0,j}(z - z_j) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k}. \quad (3.76)$$

Из (3.76) следует

$$\varphi_{0,j}(t_0 - z_j - 2iH_j) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k}, \quad (3.77)$$

$$\overline{\varphi_{0,j}(t_0 - z_j - 2iH_j)} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k}, \quad (3.78)$$

$$\varphi_{0,j}'(t_0 - z_j - 2iH_j) = -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{\infty} k c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)}, \quad (3.79)$$

$$\overline{\varphi_{0,j}'(t_0 - z_j - 2iH_j)} = -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)}, \quad (3.80)$$

$$\varphi_{0,j}''(t_0 - z_j - 2iH_j) = \frac{1}{R_{0,j}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)}, \quad (3.81)$$

$$\overline{\varphi_{0,j}''(t_0 - z_j - 2iH_j)} = \frac{1}{R_{0,j}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_j} - 2ih_j \right)^{-(k+2)}, \quad (3.82)$$

$$\overline{\psi_{0,j}}(t_0 - z_j - 2iH_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k}, \quad (3.83)$$

$$\dot{\psi}_{0,j}(t_0 - z_j - 2iH_j) = -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=0}^{\infty} k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)}, \quad (3.84)$$

$$\dot{\overline{\psi_{0,j}}}(t_0 - z_j - 2iH_j) = -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{k c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)}. \quad (3.85)$$

Из (3.74) - (3.76) с учетом (3.78) - (3.85) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\omega_j(\tau - z_j)}{\tau - t_0} d\tau = & -(t_0 - z_j) \frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{k c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{k c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} - \frac{\overline{K_j^*}}{R_{0,j}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{\omega_j(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\tau = -\sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k}, \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\overline{(t_0 - z_j)} \dot{\omega_j(\tau - z_j)}}{\tau - t_0} d\tau = & -\sum_{k=1}^{\infty} \overline{k c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{k c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \frac{\overline{K_j^*}}{R_{0,j}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Функции $\phi_{0,j}^*(t_0 - z_j)$, $\psi_{0,j}^*(t_0 - z_j)$, выраженные соответственно из (3.55), (3.56), с учетом (3.86) - (3.88) запишем в виде ($j = 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) = & \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \frac{2\overline{K_j^*}}{R_{0,j}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1}, \quad (3.89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{0,j}^*(t_0 - z_j) = & \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \frac{2\overline{K_j^*}}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{t_0 - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1}. \quad (3.90) \end{aligned}$$

Выражения (3.89), (3.90), а также (3.42) позволяют получить следующие представления для функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ ($j=1, \dots, N$), определяемых соответственно формулами (3.35), (3.36):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j) = & \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z - z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \frac{2\overline{K_j} h_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - \\ & - \frac{iK_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \left[\ln \frac{z - z_j}{R_{0,j}} + \mathfrak{a}_0 \ln \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right) \right]; \quad (3.91) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) = & \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z - z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \frac{2\overline{K_j} h_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - \frac{i\overline{K_j}}{1 + \mathfrak{a}_0} \left[\mathfrak{a}_0 \ln \frac{z - z_j}{R_{0,j}} + \ln \left(\frac{z - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right) \right]. \quad (3.92) \end{aligned}$$

В представлениях (3.91), (3.92) опущены коэффициенты при σ^0 и константы вида $\ln R_{0,j}$, $\mathfrak{a}_0 \ln R_{0,j}$, т. к. согласно формулам (3.1) они не требуются при определении напряжений.

Соотношения (3.91), (3.92) определяют соответственно функции $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ ($j=1, \dots, N$) в произвольной точке z области S_0 . Функции $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ ($j=1, \dots, N$) на контурах $L_{0,m}$ ($m=1, \dots, N$), т.е. при $z = t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$, примут вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) = & \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + (1 - \lambda_{j,m}) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \frac{2\overline{K_j} h_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - \frac{iK_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \left[\ln \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} + \mathfrak{a}_0 \ln \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) = & \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,m)} \sigma^{-k} + (1 - \lambda_{j,m}) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ & + \frac{2\overline{K_j} h_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - \frac{i\overline{K_j}}{1 + \mathfrak{a}_0} \left[\mathfrak{a}_0 \ln \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} + \ln \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Очевидно, что при $j \neq m$ ($j=1, \dots, N$; $m=1, \dots, N$) справедливо

$$\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} = \left(\frac{t_{0,m} - z_m}{R_{0,m}} + \frac{z_m - z_j}{R_{0,m}} \right) \cdot \frac{R_{0,m}}{R_{0,j}} = \delta_{m,j}^{(0)} \left((\varepsilon_{m,j})^{-1} + \sigma \right), \quad (3.95)$$

где введены обозначения

$$(\varepsilon_{m,j})^{-1} = \frac{z_m - z_j}{R_{0,m}}; \delta_{m,j}^{(0)} = \frac{R_{0,m}}{R_{0,j}}. \quad (3.96)$$

При $j \neq m$ ($j=1, \dots, N$; $m=1, \dots, N$) справедливы разложения [31, 47]

$$\left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} = \left(\delta_{m,j}^{(0)} \right)^{-k} (\varepsilon_{m,j})^k \sum_{n=0}^{\infty} C_{-k}^n \varepsilon_{m,j}^n \sigma^n = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n,k}^{(m,j)} \sigma^n, \quad (3.97)$$

$$C_{-k}^n = (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!n!}; I_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \delta_{m,j}^{(0)-k} \varepsilon_{m,j}^{n+k}; \quad (3.98)$$

$$\left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} = \left(\delta_{m,j}^{(0)} \right)^{-k} \cdot \left(\varepsilon_{m,j}' \right)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_{-k}^n \left(\varepsilon_{m,j}' \right)^n \sigma^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} \sigma^n, \quad (3.99)$$

$$\varepsilon_{m,j}' = \left(\frac{z_m - z_j}{R_{0,m}} - 2ih_j \left(\delta_{m,j}^{(0)} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \left(\delta_{m,j}^{(0)} \right)^{-k} \cdot \left(\varepsilon_{m,j}' \right)^{n+k}. \quad (3.100)$$

Для логарифмических функций, входящих в (3.93), (3.94), пренебрегая константами, получим

$$\ln \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} = \ln \left[\delta_{m,j}^{(0)} (\varepsilon_{m,j})^{-1} \right] + \ln(1 + \varepsilon_{m,j} \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (\varepsilon_{m,j})^k \sigma^k; \quad (3.101)$$

$$\ln \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right) = \ln \left[\delta_{m,j}^{(0)} \left(\sigma + (\varepsilon_{m,j}')^{-1} \right) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (\varepsilon_{m,j}')^k \sigma^k. \quad (3.102)$$

Тогда для функции $\tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) = & \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) c_k^{(1)(0,j)} I_{n,k}^{(m,j)} + \right. \\ & \left. + k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} (\varepsilon_{m,j})^{-1} \delta_{m,j}^{(0)} \tilde{I}_{n,k+1}^{(m,j)} - \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} \right] \sigma^n + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \delta_{m,j}^{(0)} \tilde{I}_{n,k+1}^{(m,j)} \sigma^{n+1} + \frac{2\overline{K} j h_j}{1 + \varkappa_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_{n,1}^{(m,j)} \sigma^n - \\ & - \frac{iK_j}{1 + \varkappa_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left[(\varepsilon_{m,j})^k + \varkappa_0 \left(\varepsilon_{m,j}' \right)^k \right] \sigma^k. \quad (3.103) \end{aligned}$$

В дальнейших выкладках для упрощения записи будем использовать следующие переменные

$$\lambda_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n, \end{cases} \quad \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } n > k; \\ 0 & \text{при } n \leq k. \end{cases} \quad (3.104)$$

Из (3.103), пренебрегая константами, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) &= \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(1)(0,j)} + \right. \\ &+ n \delta_{m,j}^{(0)} \left((\varepsilon_{m,j})^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} + \tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \left. \right] \sigma^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\overline{K_j} h_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + \frac{iK_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \cdot \frac{(-1)^k}{k} \cdot \left((\varepsilon_{m,j})^k + \mathfrak{a}_0 (\varepsilon_{m,j}')^k \right) \right] \sigma^k. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) &= \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(2)(0,j)} - \right. \\ &- (n+1) \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - n \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} + \\ &+ n(n+1) \delta_{m,j}^{(0)} \left((\varepsilon_{m,j})^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} + \tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} \left. \right] \sigma^k + \\ &+ \frac{2\overline{K_j} h_j}{1 + \mathfrak{a}_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} \sigma^k + \frac{i\overline{K_j}}{1 + \mathfrak{a}_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\mathfrak{a}_0 (\varepsilon_{m,j})^k + (\varepsilon_{m,j}')^k \right) \sigma^k. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Выражения (3.105), (3.106) для функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j)$ перепишем в виде ($j=1, \dots, N$; $m=1, \dots, N$):

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) = \lambda_{j,m} \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(3)(m,j)} \sigma^k - \lambda_{j,m} \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \ln \sigma; \quad (3.107)$$

$$\tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) = \lambda_{j,m} \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(4)(m,j)} \sigma^k - \lambda_{j,m} \frac{i\overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_0} \mathfrak{a}_0 \ln \sigma, \quad (3.108)$$

где введены следующие обозначения

$$C_k^{(3)(m,j)} = c_k^{(3)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(3)(m,j)}; \quad C_k^{(4)(m,j)} = c_k^{(4)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(4)(m,j)}; \quad (3.109)$$

$$c_k^{(3)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(1)(0,j)} + \right. \\ \left. + n \delta_{m,j}^{(0)} \left(\tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + (\varepsilon_{m,j})^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right]; \quad (3.110)$$

$$\tilde{c}_k^{(3)(m,j)} = \frac{1}{1 + \mathfrak{a}_0} \left\{ 2 \overline{K_j} h_j \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i K_j \frac{(-1)^k}{k} \left[(1 - \lambda_{m,j}) (\varepsilon_{m,j})^k + \mathfrak{a}_0 (\varepsilon_{m,j}')^k \right] \right\}; \quad (3.111)$$

$$c_k^{(4)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(2)(0,j)} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \left((n+1) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} + n \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right) + \right. \\ \left. + n(n+1) \delta_{m,j}^{(0)} \left(\tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + \varepsilon_{m,j}^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} \right]; \quad (3.112)$$

$$\tilde{c}_k^{(4)(m,j)} = \frac{\overline{K_j}}{1 + \mathfrak{a}_0} \left\{ 2 h_j \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \frac{(-1)^k}{k} \left[(1 - \lambda_{m,j}) \mathfrak{a}_0 (\varepsilon_{m,j})^k + (\varepsilon_{m,j}')^k \right] \right\}. \quad (3.113)$$

3.1.7 Получение соотношений, связывающих коэффициенты разложений потенциалов в среде и в кольцах

С учетом соотношений (3.107), (3.108) граничные условия (3.26), (3.27) примут вид

$$\varphi_m(t_{0,m} - z_m) + \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_m(t_{0,m} - z_m) + \psi_m(t_{0,m} - z_m)} = \\ = \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \\ + \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1) (\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] \sigma^{-k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\overline{C_k^{(3)(m,j)}} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right] \sigma^k \right\} - \frac{\gamma R_{0,m}^2}{4} \left[- \left(i \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) \sigma^{-2} + \right. \\ \left. + 4 h_m \left(\frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \sigma^{-1} + 4 h_m \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma + i \frac{1+\lambda}{2} \cos \beta \cdot \sigma^2 - 2 i e^{-i\beta} \ln \sigma \right] - \\ - \frac{i K_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \ln \sigma + \frac{i \overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_0} \sigma^2 - \frac{i K_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \mathfrak{a}_0 \ln \sigma; \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{a}_m \varphi_m(t_{0,m} - z_m) - \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi'_m(t_{0,m} - z_m) - \psi_m(t_{0,m} - z_m)} = \\
& = \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\mathfrak{a}_0 \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) - \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi'_{0,m}(t_{0,m} - z_m) - \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} \right] + \\
& \quad + \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} - (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathfrak{a}_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right] \sigma^k \right\} - \\
& \quad - \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \mathfrak{a}_0 \ln \sigma + \frac{i\overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_0} \sigma^2 - \frac{iK_m}{1 + \mathfrak{a}_0} \mathfrak{a}_0 \ln \sigma \right]. \quad (3.115)
\end{aligned}$$

После приведения в (3.114), (3.115) подобных членов и введения следующих обозначений

$$\begin{aligned}
L_k^{(1)(m)} &= \sum_{j=1}^N \left[(\varepsilon_{m,j})^{-1} (k+1) \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] - \\
& - \frac{\gamma R_{0,m}^2}{4} \left[-\lambda_{k,2} \left(i \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) + 4\lambda_{k,1} h_m \left(\frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \right]; \quad (3.116)
\end{aligned}$$

$$L_k^{(2)(m)} = -\frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[(\varepsilon_{m,j})^{-1} (k+1) \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right]; \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned}
L_k^{(3)(m)} &= \sum_{j=1}^N \left(C_k^{(3)(m,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \frac{\gamma R_{0,m}^2}{4} \cdot \frac{1+\lambda}{2} \cdot \left(4\lambda_{k,1} h_m + \right. \\
& \quad \left. + \lambda_{k,2} i \right) \cdot \cos \beta + \lambda_{k,2} \frac{i\overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_0}; \quad (3.118)
\end{aligned}$$

$$L_k^{(4)(m)} = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left(\mathfrak{a}_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \lambda_{k,2} \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{i\overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_0}, \quad (3.119)$$

получим граничные условия на контурах $L_{0,m}$ ($m = 1, \dots, N$) в окончательном виде

$$\begin{aligned}
& \varphi_m(t_{0,m} - z_m) + \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_m(t_{0,m} - z_m) + \psi_m(t_{0,m} - z_m)} = \\
& = \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(1)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(3)(m)} \sigma^k; \quad (3.120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{a}_m \varphi_m(t_{0,m} - z_m) - \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_m(t_{0,m} - z_m) - \psi_m(t_{0,m} - z_m)} = \\
& = \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\mathfrak{a}_0 \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) - \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) - \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} \right] + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} L_k^{(2)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(4)(m)} \sigma^k. \quad (3.121)
\end{aligned}$$

Полученные уравнения (3.120), (3.121), а также уравнение (3.28) представляют собой граничные условия задачи для подкрепленного кругового отверстия с центром в точке z_m ($m=1, \dots, N$) в полной весомой плоскости, при наличии в их правых частях дополнительных членов, представляемых в виде рядов Лорана с неизвестными коэффициентами (3.116) - (3.119), отражающих наличие наклонной границы полуплоскости и остальных подкрепленных отверстий.

Складывая уравнения (3.120) и (3.121) и разделив полученный результат на $1 + \mathfrak{a}_m$, имеем на контурах $L_{0,m}$ ($m=1, \dots, N$):

$$\begin{aligned}
\varphi_m(t_{0,m} - z_m) &= r_m \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + d_m \overline{G_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(m)} \sigma^k, \quad (3.122)
\end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$G_{0,m}(t_{0,m} - z_m) = \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)}; \quad (3.123)$$

$$r_m = \frac{1 + \mathfrak{a}_0 \frac{\mu_m}{\mu_0}}{1 + \mathfrak{a}_m}, \quad d_m = \frac{1 - \frac{\mu_m}{\mu_0}}{1 + \mathfrak{a}_m}; \quad (3.124)$$

$$M_k^{(1)(m)} = \frac{L_k^{(1)(m)} + L_k^{(2)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}, \quad M_k^{(3)(m)} = \frac{L_k^{(3)(m)} + L_k^{(4)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}. \quad (3.125)$$

Вычитая из уравнения (3.120), умноженного на $\mathfrak{a}_m$, уравнение (3.121), а затем разделив полученный результат на $1 + \mathfrak{a}_m$, имеем ($m = 1, \dots, N$):

$$\overline{G_m(t_{0,m} - z_m)} = s_m \overline{\varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + l_m \overline{G_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(m)} \sigma^k, \quad (3.126)$$

где

$$G_m(t_{0,m} - z_m) = \overline{(t_{0,m} - z_m)} \varphi_m'(t_{0,m} - z_m) + \psi_m(t_{0,m} - z_m); \quad (3.127)$$

$$s_m = 1 - r_m, \quad l_m = 1 - d_m; \quad (3.128)$$

$$M_k^{(2)(m)} = \frac{\mathfrak{a}_m L_k^{(1)(m)} - L_k^{(2)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}, \quad M_k^{(4)(m)} = \frac{\mathfrak{a}_m L_k^{(3)(m)} - L_k^{(4)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}. \quad (3.129)$$

С учетом введенных обозначений (3.127) граничные условия (3.121) на контурах $L_{1,m}$ ($m = 1, \dots, N$) запишем в виде

$$\varphi_m(t_{1,m} - z_m) + \overline{G_m(t_{1,m} - z_m)} = 0, \quad (3.130)$$

где

$$G_m(t_{1,m} - z_m) = \overline{(t_{1,m} - z_m)} \varphi_m'(t_{1,m} - z_m) + \psi_m(t_{1,m} - z_m). \quad (3.131)$$

Функции $\varphi_m(z - z_m)$, $\psi_m(z - z_m)$, регулярные в соответствующих кольцах S_m ($m = 1, \dots, N$), будем отыскивать в виде рядов Лорана

$$\varphi_m(z - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(3)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^k, \quad (3.132)$$

$$\psi_m(z - z_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(4)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^k. \quad (3.133)$$

Использование выражений (3.76), (3.132), (3.133), записанных на контурах $L_{0,m}$, т.е. при $t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$, и $L_{1,m}$, т.е. при $t_{1,m} = z_m + R_{1,m}\sigma$, позволяет получить из (3.122), (3.126), (3.130)

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{-k} c_k^{(1)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^k c_k^{(3)(m)} \sigma^k = \\
& = r_m \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + d_m \sum_{k=1}^{\infty} \left[- (1 - \lambda_{k,1})(k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] \sigma^k + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(3)(m)} \sigma^k; \quad (3.134)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left[- (1 - \lambda_{k,1})(k-2) \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{-(k-2)} \overline{c_{k-2}^{(1)(m)}} + \lambda_{k,1} \delta_{0,1}^{(m)} \overline{c_k^{(3)(m)}} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{-k} \overline{c_k^{(2)(m)}} \right] \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+2) \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{k+2} \overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} + \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^k \overline{c_k^{(4)(m)}} \right] \sigma^{-k} = \\
& = s_m \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + l_m \sum_{k=1}^{\infty} \left[- (1 - \lambda_{k,1})(k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] \sigma^k + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)(m)} \sigma^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(4)(m)} \sigma^k, \quad (3.135)
\end{aligned}$$

в которых введено обозначение

$$\delta_{0,1}^{(m)} = \frac{R_{0,m}}{R_{1,m}}; \quad (3.136)$$

а также

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_k^{(1)(m)} + (k+2) \overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} + \overline{c_k^{(4)(m)}} \right] \sigma^{-k} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[- (1 - \lambda_{k,1})(k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(m)}} + \lambda_{k,1} \overline{c_k^{(3)(m)}} + \overline{c_k^{(2)(m)}} + c_k^{(3)(m)} \right] \sigma^k = 0. \quad (3.137)
\end{aligned}$$

Приравнявая в левой и правой частях выражений (3.134), (3.135) коэффициенты при одинаковых отрицательных и положительных степенях переменных σ , имеем ($m = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, \infty$)

$$c_k^{(1)(m)} = \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^k \left(r_m c_k^{(1)(0,m)} + M_k^{(1)(m)} \right); \quad (3.138)$$

$$c_k^{(3)(m)} = \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{-k} \left\{ d_m \left[- (1 - \lambda_{k,1})(k-2) \overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] + M_k^{(3)(m)} \right\}. \quad (3.139)$$

$$(k+2)\left(\delta_{0,1}^{(m)}\right)^{k+2}\overline{c_{k+2}^{(3)(m)}} + \left(\delta_{0,1}^{(m)}\right)^k\overline{c_k^{(4)(m)}} = s_m c_k^{(1)(0,m)} + M_k^{(2)(m)}; \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned} & - (1-\lambda_{k,1})(k-2)\left(\delta_{0,1}^{(m)}\right)^{-(k-2)}\overline{c_{k-2}^{(1)(m)}} + \lambda_{k,1}\delta_{0,1}^{(m)}\overline{c_k^{(3)(m)}} + \left(\delta_{0,1}^{(m)}\right)^{-k}\overline{c_k^{(2)(m)}} = \\ & = l_m \left[- (1-\lambda_{k,1})(k-2)\overline{c_{k-2}^{(1)(0,m)}} + \overline{c_k^{(2)(0,m)}} \right] + M_k^{(4)(m)}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Полученные выражения (3.138) - (3.141) позволяют получить следующее общее соотношение ($l=1,\dots,4; k=1,\dots,\infty$)

$$c_k^{(l)(m)} = \left(\delta_{0,1}^{(m)}\right)^{e(l,k)} \left[\sum_{p=1}^2 \sum_{v=1}^{\infty} \left(P_{k,v}^{(p,l)(m)} c_v^{(p)(0,m)} + Q_{k,v}^{(p,l)(m)} \overline{c_v^{(p)(0,m)}} \right) + N_k^{(l)(m)} \right], \quad (3.142)$$

где

$$e(l,k) = \begin{cases} k, & \text{при } l=1,2, \\ -k & \text{при } l=3,4; \end{cases} \quad (3.143)$$

$$P_{k,v}^{(1,1)(m)} = \lambda_{k,v} r_m, P_{k,v}^{(2,1)(m)} = 0, Q_{k,v}^{(1,1)(m)} = Q_{k,v}^{(2,1)(m)} = 0, N_k^{(1)(m)} = M_k^{(1)(m)}; \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned} P_{k,v}^{(1,2)(m)} &= \lambda_{k-2,v} (k-2)(r_m - l_m), P_{k,v}^{(2,2)(m)} = \lambda_{k,v} l_m, \\ Q_{k,v}^{(1,2)(m)} &= 0, Q_{k,v}^{(2,2)(m)} = -\lambda_{k,1} \lambda_{k,v} d_m, \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$N_k^{(2)(m)} = -\lambda_{k,1} M_k^{(3)(m)} + (1-\lambda_{k,1})(k-2) M_{k-2}^{(1)(m)} + \overline{M_k^{(4)(m)}};$$

$$P_{k,v}^{(1,3)(m)} = P_{k,v}^{(2,3)(m)} = 0;$$

$$Q_{k,v}^{(1,3)(m)} = -\lambda_{k-2,v} (k-2) d_m; Q_{k,v}^{(2,3)(m)} = \lambda_{k,v} d_m, \quad (3.146)$$

$$N_k^{(3)(m)} = M_k^{(3)(m)};$$

$$P_{k,v}^{(1,4)(m)} = P_{k,v}^{(2,4)(m)} = 0,$$

$$Q_{k,v}^{(1,4)(m)} = \lambda_{k,v} s_m + \lambda_{k,v} k(k+2) d_m, Q_{k,v}^{(2,4)(m)} = -\lambda_{k+2,v} (k+2) d_m, \quad (3.147)$$

$$N_k^{(4)(m)} = \overline{M_k^{(2)(m)}} - (k+2) M_{k+2}^{(3)(m)}.$$

3.1.8 Формирование и решение систем алгебраических уравнений

Для получения двух систем линейных алгебраических уравнений относительно действительных и мнимых частей неизвестных комплексных коэффициентов разложений $c_\nu^{(p)(0,m)}$ ($p = 1, 2$; $m = 1, \dots, N$; $\nu = 1, \dots, \infty$) воспользуемся соотношениями (3.137). После приравнивания в них коэффициентов при одинаковых степенях переменной σ и разделения действительных и мнимых частей комплексных величин, получим:

- при положительных k

$$c_k^{(3)(m)*} - (1 - \lambda_{k,1})(k - 2)c_{k-2}^{(1)(m)*} + \lambda_{k,1}c_k^{(3)(m)*} + c_k^{(2)(m)*} = 0, \quad (3.148)$$

$$c_k^{(3)(m)**} + (1 - \lambda_{k,1})(k - 2)c_{k-2}^{(1)(m)**} - \lambda_{k,1}c_k^{(3)(m)**} - c_k^{(2)(m)**} = 0; \quad (3.149)$$

- при отрицательных k

$$c_k^{(1)(m)*} + (k + 2)c_{k+2}^{(3)(m)*} + c_k^{(4)(m)*} = 0, \quad (3.150)$$

$$c_k^{(1)(m)**} - (k + 2)c_{k+2}^{(3)(m)**} - c_k^{(4)(m)**} = 0. \quad (3.151)$$

В соотношениях (3.148) - (3.151) и далее знаками «*» и «**» обозначены соответственно действительная и мнимая части комплексных величин.

Полученные уравнения (3.148) - (3.151) запишем в виде ($k = 1, \dots, \infty$):

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,1)} c_\nu^{(p)(m)*} = 0, \quad (3.152)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,2)} c_\nu^{(p)(m)**} = 0, \quad (3.153)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,3)} c_\nu^{(p)(m)*} = 0, \quad (3.154)$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,4)} c_\nu^{(p)(m)**} = 0, \quad (3.155)$$

где

$$\begin{aligned}
T_{k,\nu}^{(1,1)} &= -\lambda_{\nu,k-2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(2,1)} = \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(3,1)} = \lambda_{\nu,k}(1 + \lambda_{k,1}), \quad T_{k,\nu}^{(4,1)} = 0; \\
T_{k,\nu}^{(1,2)} &= \lambda_{\nu,k-2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(2,2)} = -\lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(3,2)} = \lambda_{\nu,k}(1 - \lambda_{k,1}), \quad T_{k,\nu}^{(4,2)} = 0; \\
T_{k,\nu}^{(1,3)} &= \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(2,3)} = 0, \quad T_{k,\nu}^{(3,3)} = \lambda_{\nu,k+2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(4,3)} = \lambda_{\nu,k}; \\
T_{k,\nu}^{(1,4)} &= \lambda_{\nu,k}, \quad T_{k,\nu}^{(2,4)} = 0, \quad T_{k,\nu}^{(3,4)} = -\lambda_{\nu,k+2\nu}, \quad T_{k,\nu}^{(4,4)} = -\lambda_{\nu,k}.
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Далее, разделив в (3.142) действительные и мнимые части и подставив их в выражения (3.152) - (3.155), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно действительных и мнимых частей неизвестных коэффициентов $c_{\mu}^{(s)(0,m)}$ ($s = 1, 2$; $\mu = 1, \dots, \infty$; $m = 1, \dots, N$):

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,1)} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)*} + \right. \\
\left. + N_{\nu}^{(p)(m)*} \right] = 0, \tag{3.157}$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,2)} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)**} + \right. \\
\left. + N_{\nu}^{(p)(m)**} \right] = 0, \tag{3.158}$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,3)} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)*} + \right. \\
\left. + N_{\nu}^{(p)(m)*} \right] = 0, \tag{3.159}$$

$$\sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} T_{k,\nu}^{(p,4)} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right) c_{\mu}^{(s)(0,m)**} + \right. \\
\left. + N_{\nu}^{(p)(m)**} \right] = 0. \tag{3.160}$$

Очевидно, что соотношения (3.157) и (3.159), (3.158) и (3.160) образуют две системы линейных алгебраических уравнений относительно действительных и мнимых частей коэффициентов $c_\mu^{(s)(0,m)}$ ($s=1,2$; $\mu=1,\dots,\infty$; $m=1,\dots,N$).

Соотношения (3.157) – (3.160) можно привести к виду ($k=1,\dots,\infty$)

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} U_{k,\mu}^{(s,q)(m)'} c_\mu^{(s)(0,m)*} = Y_k^{(q)(m)'}, \quad q=1,2; \quad (3.161)$$

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} U_{k,\mu}^{(s,q)(m)''} c_\mu^{(s)(0,m)**} = Y_k^{(q)(m)''}, \quad q=1,2; \quad (3.162)$$

где

$$U_{k,\mu}^{(s,1)(m)'} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,1)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right); \quad (3.163)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)(m)'} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,3)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right); \quad (3.164)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,1)(m)''} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,2)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right); \quad (3.165)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)(m)''} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,4)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right); \quad (3.166)$$

$$Y_k^{(1)(m)'} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,1)} N_\nu^{(p)(m)*}; \quad (3.167)$$

$$Y_k^{(2)(m)'} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,3)} N_\nu^{(p)(m)*}; \quad (3.168)$$

$$Y_k^{(1)(m)''} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,2)} N_\nu^{(p)(m)**}; \quad (3.169)$$

$$Y_k^{(2)(m)''} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,4)} N_\nu^{(p)(m)**}. \quad (3.170)$$

Следуя работе [6], задача в целом решается итерационным методом, показавшим хорошую сходимость. В каждом приближении находятся решения двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (3.161), (3.162), соответственным образом укороченных - с удержанием числа неизвестных коэффициентов $c_{\mu}^{(1)(0,m)}$ равного n и коэффициентов $c_{\mu}^{(2)(0,m)}$ равного $n+2$. Таким образом, число уравнений в каждой системе составляет $2n+2$.

В нулевом приближении коэффициенты $c_{\mu}^{(1)(0,m)}$ и $c_{\mu}^{(2)(0,m)}$ ($m=1, \dots, N$) полагаются равными нулю, т.е.

$$c_{\mu}^{(1)(0,m)} = 0 \quad (\mu=1, \dots, n); \quad c_{\mu}^{(2)(0,m)} = 0 \quad (\mu=1, \dots, n+2). \quad (3.171)$$

С их использованием по формулам (3.110), (3.112) находятся $c_k^{(3)(m,j)}$, $c_k^{(4)(m,j)}$, по формулам (3.109) определяются величины $C_k^{(3)(m,j)}$, $C_k^{(4)(m,j)}$ ($j=1, \dots, N$). Затем находятся следующие величины: $L_k^{(0,p)(m)}$ ($p=1, \dots, 4$) из (3.116) - (3.119); $M_k^{(p)(m)}$ ($p=1, \dots, 4$) по формулам (3.125), (3.129); $N_k^{(p)(m)}$ ($p=1, \dots, 4$) по формулам из (3.144) - (3.147). В конечном итоге вычисляются коэффициенты $Y_k^{(1)(m)'}$, $Y_k^{(1)(m)''}$ столбцов свободных членов обеих систем с использованием соотношений (3.167) - (3.170).

Из решения систем уравнений (3.165), (3.166) методом Гаусса [31] на каждом шаге итерационного процесса определяются текущие значения действительных и мнимых частей коэффициентов $c_{\mu}^{(1)(0)}$ ($\mu=1, \dots, n$) и $c_{\mu}^{(2)(0)}$ ($\mu=1, \dots, n+2$). С их использованием заново вычисляются коэффициенты столбцов свободных членов обеих систем уравнений. Итерационный процесс, как показывают проведенные вычислительные эксперименты, обладает удовлетворительной сходимостью: он продолжается до тех пор, пока значения коэффициентов $c_{\mu}^{(1)(0)}$ ($\mu=1, \dots, n$) и $c_{\mu}^{(2)(0)}$ ($\mu=1, \dots, n+2$) в двух последо-

вательных итерациях будут различаться на величину, меньшую наперед заданной достаточно малой величины, например, 10^{-6} .

3.1.9 Вычисление напряжений

Дополнительные напряжения в области S_0 , моделирующей массив грунта, определяются на основе формул Колосова-Мусхелишвили [81], которые в рассматриваемом случае приобретают вид [6]:

- в декартовой системе координат xOy ($z = x + iy$)

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left[2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z - z_j) - \overline{(z - z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z - z_j) - \tilde{\psi}'_{0,j}(z - z_j) \right], \\ \sigma_y^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left[2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z - z_j) + \overline{(z - z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z - z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z - z_j) \right], \\ \tau_{xy}^{(0)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^N \left[\overline{(z - z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z - z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z - z_j) \right].\end{aligned}\quad (3.172)$$

- в полярной системе координат $rO\theta$ на контурах $L_{0,m}$

$$(z = R_{0,m} e^{i\theta}, m = 1, \dots, N)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left\{ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z - z_j) - \left[\overline{(z - z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z - z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z - z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}; \\ \sigma_\theta^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left\{ 2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z - z_j) + \left[\overline{(z - z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z - z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z - z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}; \\ \tau_{r\theta}^{(0)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^N \left\{ \left[\overline{(z - z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z - z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z - z_j) \right] e^{2i\theta} \right\}.\end{aligned}\quad (3.173).$$

Здесь и далее полярный угол θ отсчитывается от положительного направления оси OX против хода часовой стрелки.

Из формул (3.91) и (3.92) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) = & -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \right. \\ & - \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} \left\{ \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left[1 - (k+1) \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] + \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \right\rangle - \\ & - \frac{1}{R_{0,j}} \cdot \frac{1}{1+\mathfrak{a}_0} \cdot \left\{ 2\overline{K_j} h_j \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} + \right. \\ & \left. + iK_j \left[\left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} + \mathfrak{a}_0 \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\}; \quad (3.174) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ & + \left\{ (k+2) \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right) \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - 2 \left[\overline{c_k^{(1)(0,j)}} - \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right] \right\} \times \\ & \times \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right\rangle + \frac{4\overline{K_j} h_j}{(1+\mathfrak{a}_0)R_{0,j}^2} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-3} + \\ & + \frac{iK_j}{(1+\mathfrak{a}_0)R_{0,j}^2} \left[\left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-2} + \mathfrak{a}_0 \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} \right]; \quad (3.175) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-kc_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} + k \left(2(k+1)\overline{c_k^{(1)(0,j)}} + k\overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - k(k+1)^2 \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \left. \right] - \\ & - \frac{2\overline{K_j} h_j}{1+\mathfrak{a}_0} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} - \frac{i\overline{K_j}}{1+\mathfrak{a}_0} \left[\mathfrak{a}_0 \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} + \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\}. \quad (3.176) \end{aligned}$$

Для вычисления полных напряжений в точках области S_0 к найденным дополнительным напряжениям прибавляются соответствующие начальные напряжения, определяемые соотношениями (2.6).

Формулы для напряжений, возникающих в точках колец S_m ($m=1, \dots, N$), моделирующих обделки, в полярной системе координат имеют вид [6]:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(m)} + \sigma_\theta^{(m)} &= 4 \operatorname{Re} \varphi_m'(z - z_m), \\ \sigma_\theta^{(m)} - \sigma_r^{(m)} + 2i \tau_{r\theta}^{(m)} &= 2 \left[\overline{(z - z_m)} \varphi_m''(z - z_m) + \psi_m'(z - z_m) \right] e^{2i\theta},\end{aligned}\quad (3.177)$$

откуда

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2 \varphi_m'(z - z_m) - \left[\overline{(z - z_m)} \varphi_m''(z - z_m) + \psi_m'(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \sigma_\theta^{(m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2 \varphi_m'(z - z_m) + \left[\overline{(z - z_m)} \varphi_m''(z - z_m) + \psi_m'(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \tau_{r\theta}^{(m)} &= \operatorname{Im} \left\{ \left[\overline{(z - z_m)} \varphi_m''(z - z_m) + \psi_m'(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}.\end{aligned}\quad (3.178)$$

С использованием коэффициентов $c_\nu^{(1)(0)}$ ($\nu=1, \dots, n$) и $c_\nu^{(2)(0)}$ ($\nu=1, \dots, n+2$) по формулам (3.142) определяются коэффициенты $c_k^{(l)(m)}$ ($l=1, \dots, 4$, $m=1, \dots, N$, $k=1, \dots, \infty$).

Для определения напряжений в точках наружных $L_{0,m}$ и внутренних $L_{1,m}$ контуров, ограничивающих области S_m ($m=1, \dots, N$), найдем соответствующие производные из выражений (3.132), (3.133):

$$\varphi_m'(z - z_m) = \frac{1}{R_{1,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[-c_k^{(1)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(3)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-1} \right], \quad (3.179)$$

$$\begin{aligned}\varphi_m''(z - z_m) &= \frac{1}{R_{1,m}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[(k+1) c_k^{(1)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ &\quad \left. + (k-1) c_k^{(3)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-2} \right],\end{aligned}\quad (3.180)$$

$$\psi'_m(z - z_m) = \frac{1}{R_{1,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[-c_k^{(2)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(4)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-1} \right], \quad (3.181)$$

где

$$z = \begin{cases} z_m + R_{0,m} e^{i\theta} & \text{на внешнем контуре } L_{0,m} \text{ области } S_m; \\ z_m + R_{1,m} e^{i\theta} & \text{на внутреннем контуре } L_{1,m} \text{ области } S_m. \end{cases} \quad (3.182)$$

Подстановка выражений (3.179) - (3.181) в формулы (3.178) позволяет получить компоненты тензора напряжений в точках соответствующих контуров в полярной системе координат.

Приведенное решение составляет основу метода расчета обделок взаимовлияющих параллельных круговых тоннелей, пройденных закрытым способом вблизи склона земной поверхности, на действие собственного веса грунта.

3.2 Решение краевой задачи ТФКП, соответствующей задаче о действии веса объектов на поверхности

3.2.1 Граничные условия краевой задачи ТФКП

Расчет обделок параллельных взаимовлияющих круговых тоннелей мелкого заложения на действие веса зданий или сооружений на поверхности (задача 2) базируется на решении плоской задачи теории упругости, расчетная схема которой приведена на рис. 3.2.

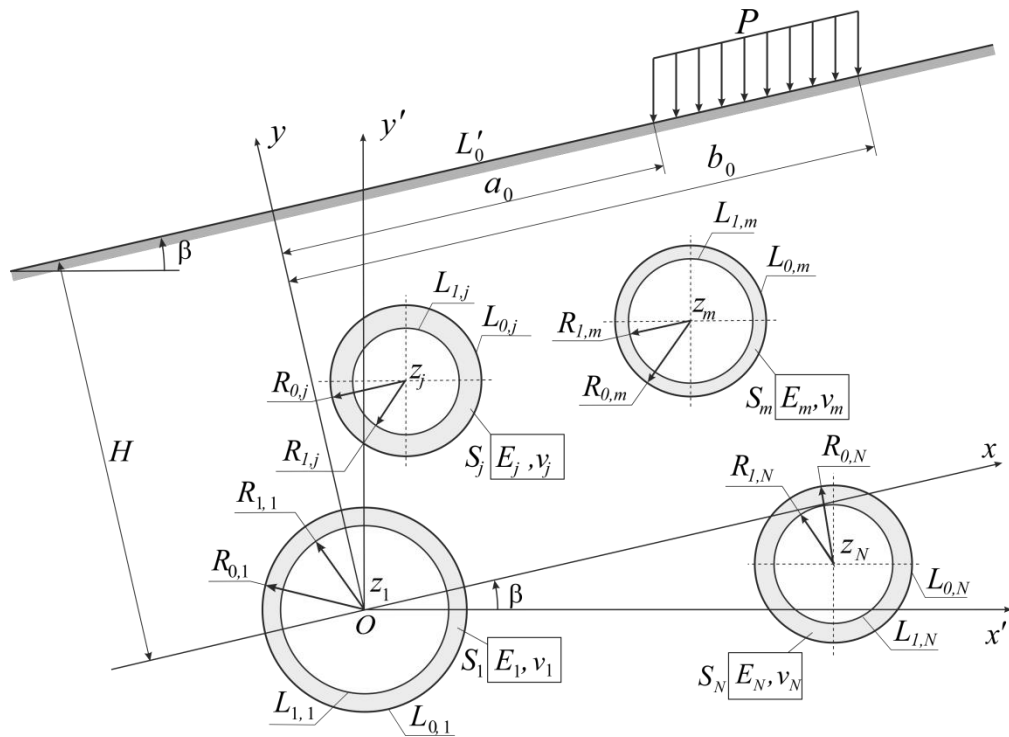


Рисунок 3.2 - Расчетная схема

Граничные условия соответствующей краевой задачи ТФКП имеют вид ($m = 1, \dots, N$):

$$\tilde{\varphi}_0(t_0) + t_0 \overline{\tilde{\varphi}_0'(t_0)} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_0)} = \begin{cases} f(t_0) & \text{при } a_0 \leq \operatorname{Re} t_0 \leq b_0; \\ 0 & \text{при } \operatorname{Re} t_0 < a_0, \operatorname{Re} t_0 > b_0, \end{cases} \quad \text{на } L'_0, \quad (3.183)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\varphi}_m(t_{0,m}) + t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_m(t_{0,m})} &= \\ &= \tilde{\varphi}_0(t_{0,m}) + t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}_0'(t_{0,m})} + \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})}, \\ \tilde{\varphi}_m(t_{0,m}) - t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_m(t_{0,m})} &= \\ &= \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\tilde{\varphi}_0(t_{0,m}) - t_{0,m} \overline{\tilde{\varphi}_0'(t_{0,m})} - \overline{\tilde{\psi}_0(t_{0,m})} \right] \end{aligned} \right. \quad \text{на } L_{0,m}; \quad (3.184)$$

$$\tilde{\varphi}_m(t_{1,m}) + t_{1,m} \overline{\tilde{\varphi}_m'(t_{1,m})} + \overline{\tilde{\psi}_m(t_{1,m})} = 0 \quad \text{на } L_{1,m}. \quad (3.185)$$

Граничное условие (3.183) отражает наличие внешней нагрузки, определяемой функцией $f(t_0)$, на линии L'_0 ; условия (3.184) определяют непрерывность векторов напряжений (первое соотношение) и смещений (второе

соотношение) на контурах $L_{0,m}$ ($m=1,...,N$); условия (3.185) свидетельствуют об отсутствии внешних нагрузок на контурах $L_{1,m}$ ($m=1,...,N$).

3.2.2 Определение функции $f(t_0)$

Следуя [6], для определения функции $f(t_0)$ воспользуемся соотношением

$$f(t_0) = i \int_{-\infty}^{t_0} (X_n^{(0)} + iY_n^{(0)}) ds_0, \quad (3.186)$$

где $X_n^{(0)}$, $Y_n^{(0)}$ - компоненты главного вектора усилий на участке ds_0 прямой L_0' , обусловленные весом нагрузки на поверхности, причем $a_0 \leq \text{Ret}_0 \leq b_0$.

Компоненты $X_n^{(0)}$, $Y_n^{(0)}$ выражаются через нормальные $\sigma_x^{(0)(0)}$, $\sigma_y^{(0)(0)}$ и касательные $\tau_{xy}^{(0)(0)}$ напряжения, обусловленные наличием на части линии L_0' вертикальной нагрузки P , следующими формулами, аналогичными (3.7):

$$\begin{aligned} X_n^{(0)} &= \sigma_x^{(0)(0)} \cos(n, x) + \tau_{xy}^{(0)(0)} \cos(n, y); \\ Y_n^{(0)} &= \tau_{xy}^{(0)(0)} \cos(n, x) + \sigma_y^{(0)(0)} \cos(n, y), \end{aligned} \quad (3.187)$$

где n - внешняя нормаль к линии L_0' . Направляющие косинусы при положительном направлении обхода контура L_0' определяются формулами [81]

$$\cos(n, x) = -\frac{dy}{ds_0}, \quad \cos(n, y) = \frac{dx}{ds_0}; \quad (3.188)$$

а для напряжений $\sigma_x^{(0)(0)}$, $\sigma_y^{(0)(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)(0)}$ на линии L_0' справедливы следующие соотношения

$$\sigma_x^{(0)(0)} = 0; \sigma_y^{(0)(0)} = \begin{cases} 0 & \text{при } y = H; x < a_0, x > b_0; \\ -P \cos \beta & \text{при } y = H; a_0 \leq x \leq b_0; \end{cases} \quad (3.189)$$

$$\tau_{xy}^{(0)(0)} = \begin{cases} 0 & \text{при } y = H; x < a_0, x > b_0; \\ -P \sin \beta & \text{при } y = H; a_0 \leq x \leq b_0. \end{cases}$$

Тогда с учетом (3.188) и (3.189) имеем

$$X_n^{(0)} + iY_n^{(0)} = P \left[\sin \beta \frac{dx}{ds_0} - i \sin \beta \frac{dy}{ds_0} + i \cos \beta \frac{dx}{ds_0} \right]. \quad (3.190)$$

Далее учтем, что на линии L_0' выполняется

$$dx = dt_0; dy = 0, \quad (3.191)$$

поэтому для функции $f(t_0)$ справедливо

$$f(t_0) = -Pe^{-i\beta}(t_0 - a_0). \quad (3.192)$$

Пренебрегая в выражении (3.192) константой, окончательно получим

$$f(t_0) = \begin{cases} -Pt_0 e^{-i\beta} & \text{при } a_0 \leq \operatorname{Re} t_0 \leq b_0; \\ 0 & \text{при } \operatorname{Re} t_0 < a_0, \operatorname{Re} t_0 > b_0. \end{cases} \quad (3.193)$$

3.2.3 Представление комплексных потенциалов и преобразование граничных условий

Как известно, искомые комплексные потенциалы $\tilde{\varphi}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$, характеризующие напряженно-деформированное состояние среды S_0 , ослабленной отверстиями, связанные с дополнительными напряжениями и смещениями формулами (3.1), с учетом неинвариантности функции $\tilde{\psi}_0(z)$ при переносе начала координат и сохранения обозначений, принятых в п. 3.1.3, отыскиваются в виде:

$$\tilde{\varphi}_0(z) = \sum_{j=1}^N \tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j) + \varphi_0^{(0)}(z) = \sum_{j=1}^N \varphi_{0,j}^*(z - z_j) + \varphi_0^{(0)}(z); \quad (3.194)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0(z) &= \sum_{j=1}^N \left[\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) - \overline{z_j} \tilde{\varphi}_{0,j}'(z - z_j) \right] + \psi_0^{(0)}(z) = \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\psi_{0,j}^*(z - z_j) - \overline{z_j} \varphi_{0,j}^{*'}(z - z_j) \right] + \psi_0^{(0)}(z). \end{aligned} \quad (3.195)$$

В представлениях (3.194), (3.195) учтены следующие соотношения

$$\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j) = \varphi_{0,j}^*(z - z_j); \quad \tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j) = \psi_{0,j}^*(z - z_j), \quad (3.196)$$

где комплексные функции $\varphi_{0,j}^*(z - z_j)$, $\psi_{0,j}^*(z - z_j)$ регулярны в полубесконечной области S_0 (нижняя полуплоскость) вне отверстий с контурами $L_{0,j}$ ($j = 1, \dots, N$), включая бесконечно удаленную точку.

Комплексные потенциалы $\varphi_0^{(0)}(z)$, $\psi_0^{(0)}(z)$ характеризуют напряженно-деформированное состояние полуплоскости без отверстий, нагруженной на участке $a_0 \leq \text{Re} z \leq b_0$ наклонной границы L_0' распределенной нагрузкой P , и имеют следующее представление [138, 6, 60, 56]:

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(0)}(z) &= -\frac{iPe^{-i\beta}}{2\pi} [(z-b)\ln(z-b) - (z-a)\ln(z-a)]; \\ \psi_0^{(0)}(z) &= \frac{iP}{2\pi} \left\{ (e^{-i\beta} - e^{i\beta}) [(z-b)\ln(z-b) - (z-a)\ln(z-a)] + \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\beta} (\bar{b}\ln(z-b) - \bar{a}\ln(z-a)) \right\}, \end{aligned} \quad (3.197)$$

где $a = a_0 + iH$; $b = b_0 + iH$ (рис. 3.2).

Потенциалы $\tilde{\varphi}_m(z)$, $\tilde{\psi}_m(z)$, регулярные в кольцах S_m ($m = 1, \dots, N$), с учетом неинвариантности функций $\tilde{\psi}_m(z)$ представляются в виде (3.24).

В случае, когда тоннели проводятся вблизи существующего на поверхности сооружения, смещения в массиве грунта рассматриваются только как дополнительные, вызываемые проходкой самих тоннелей, поэтому комплексные потенциалы $\varphi_0^{(0)}(z)$, $\psi_0^{(0)}(z)$, характеризующие напряженно-деформированное состояние массива до сооружения тоннелей, исключаются из рассмотрения во втором из граничных условий (3.184) на контурах $L_{0,m}$ ($m = 1, \dots, N$).

Подставив выражения (3.194), (3.195) в граничное условие (3.183) на контуре L_0' , получим следующее выражение

$$\sum_{j=1}^N \left[\varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) + (t_0 - z_j) \overline{\varphi_{0,j}^{*'}}(t - z_j) + \overline{\psi_{0,j}^*}(t - z_j) \right] = 0, \quad (3.198)$$

из которого очевидна справедливость следующих соотношений

$$\varphi_{0,j}^*(t_0 - z_j) + (t_0 - z_j) \overline{\varphi_{0,j}^{*'}}(t_0 - z_j) + \overline{\psi_{0,j}^*}(t_0 - z_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, N), \quad (3.199)$$

совпадающих с представлениями (3.41) в задаче о действии собственного веса грунта, записанными при $K_j^* = 0$ ($j = 1, \dots, N$).

Аналитическое продолжение функций $\varphi_{0,j}^*(z - z_j)$, $\psi_{0,j}^*(z - z_j)$ через границу полуплоскости L_0 в верхнюю полуплоскость $\hat{S}$, выполненное так же, как в п. 3.1.6, позволяет получить следующие представления для функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$ при $z = t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$ ($j = 1, \dots, N$; $m = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) &= \varphi_{0,j}^*(t_{0,m} - z_j) = \\ &= \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,m)} \sigma^{-k} + (1 - \lambda_{j,m}) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} = \lambda_{j,m} \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(3)(m,j)} \sigma^k; \end{aligned} \quad (3.200)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{0,j}(t_{0,m} - z_j) &= \lambda_{j,m} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,m)} \sigma^{-k} + (1 - \lambda_{j,m}) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \right)^{-k} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left(\frac{t_{0,m} - z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-k} = \lambda_{j,m} \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(4)(m,j)} \sigma^k, \end{aligned} \quad (3.201)$$

где величины $C_k^{(3)(m,j)}$, $C_k^{(4)(m,j)}$ определяются по формулам (3.109). Для коэффициентов $c_k^{(3)(m,j)}$, $c_k^{(4)(m,j)}$ справедливы ранее полученные соотношения (3.110), (3.112) с учетом

$$\tilde{c}_k^{(3)(m,j)} = 0; \quad \tilde{c}_k^{(4)(m,j)} = 0. \quad (3.202)$$

Используя представления (3.197), запишем выражения для функций $\varphi_0^{(0)}(z)$, $\psi_0^{(0)}(z)$ на контурах $L_{0,m}$ ($m=1, \dots, N$), т.е. при $z = t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$:

$$\varphi_0^{(0)}(t_{0,m}) = -\frac{iPe^{-i\beta}}{2\pi} [(t_{0,m} - b)\ln(t_{0,m} - b) - (t_{0,m} - a)\ln(t_{0,m} - a)]; \quad (3.203)$$

$$\begin{aligned} \psi_0^{(0)}(t_{0,m}) = \frac{iP}{2\pi} \left\{ (e^{-i\beta} - e^{i\beta}) [(t_{0,m} - b)\ln(t_{0,m} - b) - \right. \\ \left. - (t_{0,m} - a)\ln(t_{0,m} - a)] + e^{-i\beta} [\bar{b}\ln(t_{0,m} - b) - \bar{a}\ln(t_{0,m} - a)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.204)$$

Используя известное разложение [47]

$$\ln(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \quad |z| \leq 1; \quad (3.205)$$

получим ($m=1, \dots, N$)

$$\ln(t_{0,m} - a) = \ln(z_m - a) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^k \sigma^k; \quad (3.206)$$

$$\ln(t_{0,m} - b) = \ln(z_m - b) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^k \sigma^k. \quad (3.207)$$

С учетом представлений (3.206), (3.207), пренебрегая константами, приведем выражения (3.203), (3.204) при $z = t_{0,m} = z_m + R_{0,m}\sigma$ к виду

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(0)}(t_{0,m}) = -\frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{k,1} \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] \right\} \sigma^k; \end{aligned} \quad (208)$$

$$\begin{aligned}
\psi_0^{(0)}(t_{0,m}) = & \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{k,1}(1-e^{2i\beta}) \ln \frac{z_m-b}{z_m-a} + \right. \\
& + (1-e^{2i\beta}) \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^{k-1} \right] + \\
& \left. + \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{1}{k} \left[\overline{a} \left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^k - \overline{b} \left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^k \right] \right\} \sigma^k. \quad (3.209)
\end{aligned}$$

Подставляя в условия (3.184) выражения (3.200), (3.201), (3.208), (3.209), получим

$$\begin{aligned}
& \varphi_m(t_{0,m}-z_m) + \overline{(t_{0,m}-z_m)} \overline{\varphi_m(t_{0,m}-z_m)} + \overline{\psi_m(t_{0,m}-z_m)} = \\
& = \varphi_{0,m}(t_{0,m}-z_m) + \overline{(t_{0,m}-z_m)} \overline{\varphi_{0,m}(t_{0,m}-z_m)} + \overline{\psi_{0,m}(t_{0,m}-z_m)} + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] \sigma^{-k} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\overline{C_k^{(3)(m,j)}} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right] \sigma^k \left. \right\} - \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{k,1} \ln \frac{z_m-b}{z_m-a} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^{k-1} \right] \right\} \sigma^k - \right. \\
& - e^{2i\beta} \left\{ \overline{\ln \frac{z_m-b}{z_m-a}} \sigma + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^{k+1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^{k+1} \right] \sigma^{-k} \right\} + \\
& + e^{2i\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{k,1}(1-e^{-2i\beta}) \overline{\ln \frac{z_m-b}{z_m-a}} + (1-e^{-2i\beta}) \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^{k-1} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{1}{k} \left[\overline{a} \left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^k - \overline{b} \left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^k \right] \right\} \sigma^{-k} \left. \right\rangle; \quad (3.210)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{a}_m \varphi_m(t_{0,m} - z_m) - \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi'_m(t_{0,m} - z_m) - \psi_m(t_{0,m} - z_m)} = \\
& = \frac{\mu_m}{\mu_0} \left[\mathfrak{a}_0 \varphi_{0,m}(t_{0,m} - z_m) - \overline{(t_{0,m} - z_m) \varphi'_{0,m}(t_{0,m} - z_m) - \psi_{0,m}(t_{0,m} - z_m)} \right] - \\
& - \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] \sigma^{-k} - \right. \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathfrak{a}_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right] \sigma^k \left. \right\} - \frac{iPR_{0,m} e^{-i\beta}}{2\pi} \left\langle \mathfrak{a}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{k,1} \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + \right. \right. \\
& + \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] \left. \right\} \sigma^k + \\
& + e^{2i\beta} \left\{ \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} \sigma + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k+1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k+1} \right] \sigma^{-k} \right\} - \\
& - e^{2i\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{k,1} (1 - e^{-2i\beta}) \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + (1 - e^{-2i\beta}) \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{1}{k} \left[a \left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^k - b \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^k \right] \right\} \sigma^{-k} \left. \right\rangle. \quad (3.211)
\end{aligned}$$

Перепишем выражения (3.210), (3.211) в виде (3.120), (3.121), в которых

$$\begin{aligned}
L_k^{(1)(m)} &= \sum_{j=1}^N \left[(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] + \\
& + \frac{iPR_{0,m} e^{-i\beta}}{2\pi} \left\{ e^{2i\beta} \frac{1}{k+1} \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k+1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k+1} \right] + \lambda_{k,1} (1 - e^{2i\beta}) \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + \right. \\
& + (1 - e^{2i\beta}) \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] - \\
& \left. - e^{2i\beta} \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{1}{k} \left[a \left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^k - b \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^k \right] \right\}; \quad (3.212)
\end{aligned}$$

$$L_k^{(3)(m)} = \sum_{j=1}^N \left(C_k^{(3)(m,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \left\{ \lambda_{k,1} \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] - \lambda_{k,1} e^{2i\beta} \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} \right\}; \quad (3.213)$$

$$L_k^{(2)(m)} = -\frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] - \\ - \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \left\{ e^{2i\beta} \frac{1}{k+1} \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k+1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k+1} \right] + \lambda_{k,1} (1 - e^{2i\beta}) \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + \right. \\ \left. + (1 - e^{2i\beta}) \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] - \right. \\ \left. - e^{2i\beta} \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{1}{k} \left[a \left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^k - b \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^k \right] \right\}; \quad (3.214)$$

$$L_k^{(4)(m)} = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left(\varepsilon_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \left\{ \lambda_{k,1} \varepsilon_0 \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + \right. \\ \left. + \varepsilon_0 \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] + \lambda_{k,1} e^{2i\beta} \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} \right\}. \quad (3.215)$$

Таким образом, граничные условия в виде (3.120), (3.121), (3.28) с коэффициентами $L_k^{(p)(m)}$ ($p=1,...,4$; $k=1,...,\infty$; $m=1,...,N$), определяемыми соотношениями (3.212) - (3.215), являются граничными условиями задачи о действии веса объекта на поверхности над уже существующим комплексом тоннелей.

Если рассчитываются тоннели, сооружаемые под существующим объектом на поверхности, то в граничных условиях (3.120), (3.121) принимается

$$L_k^{(2)(m)} = L_k^{(4)(m)} = 0 \quad (m=1,...,N). \quad (3.216)$$

Для комплексных потенциалов $\varphi_m(z - z_m)$, $\psi_m(z - z_m)$, характеризующих напряженно-деформированное состояние колец S_m ($m = 1, \dots, N$), справедливы представления (3.132), (3.133).

3.2.4 Формирование и решение систем уравнений

Далее остаются справедливыми выкладки (3.122) - (3.170), которые позволяют получить две системы линейных алгебраических уравнений вида (3.161), (3.162), при формировании столбцов свободных членов которых используются коэффициенты $L_k^{(p)(m)}$ ($p = 1, \dots, 4$; $k = 1, \dots, \infty$, $m = 1, \dots, N$), вычисляемые по формулам (3.212) - (3.215).

Решение задачи, как и в п. 3.1, осуществляется итерационным методом.

3.2.5 Вычисление напряжений

Напряжения в точках $z = x + iy$ области S_0 , моделирующей массив грунта, в декартовой системе координат xOy определяются по формулам (3.172), в полярной системе координат $rO\theta$ на контурах $L_{0,m}$ ($z = R_{0,m}e^{i\theta}$, $m = 1, \dots, N$) - по формулам (3.173). Полярный угол θ отсчитывается от положительного направления оси OX против хода часовой стрелки.

Для производных от функций $\tilde{\varphi}_{0,j}(z - z_j)$, $\tilde{\psi}_{0,j}(z - z_j)$, входящих в (3.172), (3.173), справедливы следующие представления

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) = & -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} \left\{ \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left[1 - (k+1) \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] + \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \right\rangle - \\ & - \lambda_{j,m} \frac{iPe^{-i\beta}}{2\pi} \ln \frac{z-b}{z-a}; \quad (3.217) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ & + \left\{ (k+2) \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right) \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - 2 \right\} \cdot \overline{c_k^{(1)(0,j)}} - \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \left\{ \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right\rangle - \lambda_{j,m} \frac{iPe^{-i\beta}}{2\pi} \cdot \frac{b-a}{(z-b)(z-a)}; \quad (3.218) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-kc_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} + \right. \right. \\ & + k \left(2(k+1) \overline{c_k^{(1)(0,j)}} + k \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right) \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \\ & \left. \left. - k(k+1)^2 \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \right] + \right. \\ & \left. + \lambda_{j,m} \frac{iP}{2\pi} \left[(e^{-i\beta} - e^{i\beta}) \ln \frac{z-b}{z-a} + e^{-i\beta} \left(\frac{\bar{b}}{z-b} - \frac{\bar{a}}{z-a} \right) \right] \right\}. \quad (3.219) \end{aligned}$$

Формулы для напряжений, возникающих в точках наружного и внутреннего контуров колец S_m ($m=1, \dots, N$), моделирующих обделки, в полярной системе координат имеют вид (3.178) с использованием представлений (3.179) - (3.181).

Приведенное решение составляет основу расчета обделок взаимовлияющих параллельных круговых тоннелей, пройденных закрытым способом вблизи склона земной поверхности, на действие нагрузки на поверхности, моделирующей вес зданий или сооружений.

3.3 Алгоритм расчета

Ниже приведен алгоритм расчета монолитных обделок параллельных тоннелей кругового сечения, сооруженных закрытым способом вблизи склона, на действие собственного веса грунта и веса объектов на поверхности.

Общие исходные данные:

E_0 (МПа) - модуль деформации грунта;

ν_0 - коэффициент Пуассона грунта;

β (градусы) - угол наклона земной поверхности;

N - количество тоннелей;

H' (м) - расстояние по вертикали от наклонной линии, моделирующей земную поверхность, до центра поперечного сечения первого тоннеля, с которым совмещено начало системы координат $X'OY'$;

x'_j, y'_j (м) - координаты центра поперечного сечения j -того тоннеля ($j=1, \dots, N$) в прямоугольной системе координат $X'OY'$ (рис. 3.1, 3.2);

$R_{0,j}, R_{1,j}$ (м) - соответственно наружный и внутренний радиусы кольца, моделирующего поперечное сечение обделки j -того тоннеля ($j=1, \dots, N$);

E_j (МПа) - модуль деформации материала обделки j -того тоннеля ($j=1, \dots, N$);

ν_j - коэффициент Пуассона материала обделки j -того тоннеля ($j=1, \dots, N$);

K_c - число удерживаемых членов разложений в ряды комплексных потенциалов;

ε - величина погрешности, при достижении которой итерационный процесс решения задачи прекращается ($\varepsilon < 10^{-6}$);

$I_{\max}$ - максимальное число выполняемых шагов итерационного процесса, при котором ожидается достижение точности расчетов, задаваемой ε .

Дополнительные исходные данные, определяемые видом нагрузки, на действие которой производится расчет, приведены ниже.

Собственный вес грунта (задача 1):

λ - коэффициент бокового давления в ненарушенном массиве грунта;

γ (МН/м³) - удельный вес грунта.

Вес объекта на поверхности (задача 2):

P (МН/м) - интенсивность нагрузки;

a_0, b_0 (м) - абсциссы левой и правой границ участка действия нагрузки на поверхности в системе координат XOY .

1. Определяется количество уравнений в разрешающих системах:

$$K_u = 2 \cdot K_c + 2. \quad (3.220)$$

2. Вычисляются величины:

$$H_j = H' \cos \beta - y_j; \quad h_j = \frac{H_j}{R_{0,j}} \quad (j = 1, \dots, N). \quad (3.221)$$

3. Формируются координаты центров поперечных сечений тоннелей в комплексном виде:

$$z_j = x_j + iy_j \quad (j = 1, \dots, N). \quad (3.222)$$

4. Вычисляются главные векторы усилий, действующих на контурах $L_{0,j}$:

$$K_j = \begin{cases} \frac{\gamma R_{0,j}^2}{2} e^{-i\beta} & \text{в задаче 1, } (j = 1, \dots, N); \\ 0 & \text{в задаче 2} \end{cases} \quad (3.223)$$

5. Для задачи 2 вычисляются углы, характеризующие начало и конец нагрузки на поверхности ($j = 1, \dots, N$)

$$\varphi_{a_0} = \begin{cases} \arctg \frac{h_j}{a_0} & \text{при } a_0 > 0, \\ \pi - \arctg \frac{h_j}{a_0} & \text{при } a_0 < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } a_0 = 0. \end{cases} \quad \varphi_{b_0} = \begin{cases} \arctg \frac{h_j}{b_0} & \text{при } b_0 > 0, \\ \pi - \arctg \frac{h_j}{b_0} & \text{при } b_0 < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } b_0 = 0. \end{cases} \quad (3.224)$$

6. Определяются величины:

$$\alpha_l = 3 - 4\nu_l; \quad \mu_l = \frac{E_l}{2(1 + \nu_l)} \quad (l = 0, 1, \dots, N); \quad (3.225)$$

$$\eta_l = \frac{1 + \frac{\mu_l}{\mu_0} \alpha_0}{1 + \alpha_l}; \quad d_l = \frac{1 - \frac{\mu_l}{\mu_0}}{1 + \alpha_l}; \quad s_l = 1 - \eta_l; \quad l_l = 1 - d_l \quad (l = 1, \dots, N). \quad (3.226)$$

7. Для $m = 1, \dots, N$ и $j = 1, \dots, N$ вычисляются значения

$$\varepsilon'_{m,j} = \left(\frac{z_m - z_j}{R_{0,m}} - \frac{2ih_j}{\delta_{m,j}^{(0)}} \right)^{-1}; \quad \delta_{m,j}^{(0)} = \frac{R_{0,m}}{R_{0,j}}; \quad \varepsilon_{m,j} = \frac{R_{0,m}}{z_m - z_j} \quad (j \neq m). \quad (3.227)$$

8. Определяются массивы чисел ($k = 1, \dots, K_c + 4$, $n = 0, 1, \dots, K_c + 3$):

$$C_k^0 = 1; \quad C_k^{n+1} = \frac{k-n}{n+1} C_k^n; \quad (3.228)$$

$$C_{-k}^0 = 1; \quad C_{-k}^{n+1} = -\frac{k+n}{n+1} C_{-k}^n. \quad (3.229)$$

9. Вычисляются ($m = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, K_c + 2$; $n = 1, \dots, K_c + 2$):

$$I_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \left(\delta_{m,j}^{(0)} \right)^{-k} \cdot (\varepsilon_{m,j})^{n+k}; \quad \tilde{I}_{n,k}^{(m,j)} = C_{-k}^n \left(\delta_{m,j}^{(0)} \right)^{-k} \cdot (\varepsilon'_{m,j})^{n+k}. \quad (3.230)$$

10. Определяются массивы величин

$$\lambda_{k,\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu = k, \\ 0, & \text{если } \nu \neq k. \end{cases} \quad (3.231)$$

11. В зависимости от задачи определяются коэффициенты ($m=1,...,N$;
 $j=1,...,N$; $k=1,...,K_c+2$):

$$\tilde{c}_k^{(3)(m,j)} = \begin{cases} \frac{1}{1+\mathfrak{a}_0} \cdot \left[2\overline{K_j} h_j \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + \right. \\ \left. + iK_j \frac{(-1)^k}{k} \left((1-\lambda_{m,j})(\varepsilon_{m,j})^k + \mathfrak{a}_0(\varepsilon'_{m,j})^k \right) \right] \text{ в задаче 1;} \\ 0 \text{ в задаче 2;} \end{cases} \quad (3.232)$$

$$\tilde{c}_k^{(4)(m,j)} = \begin{cases} \frac{\overline{K_j}}{1+\mathfrak{a}_0} \cdot \left[2h_j \tilde{I}_{k,1}^{(m,j)} + i \frac{(-1)^k}{k} \left((1-\lambda_{m,j}) \mathfrak{a}_0(\varepsilon_{m,j})^k + (\varepsilon'_{m,j})^k \right) \right] \\ \text{в задаче 1;} \\ 0 \text{ в задаче 2.} \end{cases} \quad (3.233)$$

12. Вычисляются коэффициенты $P_{k,n}^{(p,l)(m)}$, $Q_{k,n}^{(p,l)(m)}$

($m=1,...,N$; $p=1, 2$; $l=1,...,4$; $k=1,...,K_c+2$; $n=1,...,K_c+2$):

$$\begin{aligned} P_{k,n}^{(1,1)(m)} &= \lambda_{k,n} r_m, P_{k,n}^{(2,1)(m)} = 0, Q_{k,n}^{(1,1)(m)} = Q_{k,n}^{(2,1)(m)} = 0; \\ P_{k,n}^{(1,2)(m)} &= \lambda_{k-2,n} (k-2)(r_m - l_m), P_{k,n}^{(2,2)(m)} = \lambda_{k,n} l_m, \\ Q_{k,n}^{(1,2)(m)} &= 0, Q_{k,n}^{(2,2)(m)} = -\lambda_{k,1} \lambda_{k,n} d_m; \\ P_{k,n}^{(1,3)(m)} &= P_{k,n}^{(2,3)(m)} = 0; Q_{k,n}^{(1,3)(m)} = -\lambda_{k-2,n} (k-2) d_m; Q_{k,n}^{(2,3)(m)} = \lambda_{k,n} d_m; \\ P_{k,n}^{(1,4)(m)} &= P_{k,n}^{(2,4)(m)} = 0, \\ Q_{k,n}^{(1,4)(m)} &= \lambda_{k,n} [s_m + k(k+2)d_m], Q_{k,n}^{(2,4)(m)} = -\lambda_{k+2,n} (k+2) d_m. \end{aligned} \quad (3.234)$$

13. Вычисляются коэффициенты $T_{k,\nu}^{(p,q)}$ ($p=1,...,4$; $q=1,...,4$;

$k=1,...,K_c+2$; $\nu=1,...,K_c+2$):

$$\begin{aligned} T_{k,\nu}^{(1,1)} &= -\lambda_{\nu,k-2\nu}, T_{k,\nu}^{(2,1)} = \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(3,1)} = \lambda_{\nu,k}(1+\lambda_{k,1}), T_{k,\nu}^{(4,1)} = 0; \\ T_{k,\nu}^{(1,2)} &= \lambda_{\nu,k-2\nu}, T_{k,\nu}^{(2,2)} = -\lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(3,2)} = \lambda_{\nu,k}(1-\lambda_{k,1}), T_{k,\nu}^{(4,2)} = 0; \\ T_{k,\nu}^{(1,3)} &= \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(2,3)} = 0, T_{k,\nu}^{(3,3)} = \lambda_{\nu,k+2\nu}, T_{k,\nu}^{(4,3)} = \lambda_{\nu,k}; \\ T_{k,\nu}^{(1,4)} &= \lambda_{\nu,k}, T_{k,\nu}^{(2,4)} = 0, T_{k,\nu}^{(3,4)} = -\lambda_{\nu,k+2\nu}, T_{k,\nu}^{(4,4)} = -\lambda_{\nu,k}. \end{aligned} \quad (3.235)$$

14. Вычисляются элементы матриц двух систем из K_u линейных алгебраических уравнений относительно искоемых действительных $c_\mu^{(s)(0,m)*}$ и мнимых $c_\mu^{(s)(0,m)**}$ ($s=1,2$) частей комплексных коэффициентов разложений $c_\mu^{(1)(0,m)}$ ($\mu=1,...,K_c$) и $c_\mu^{(2)(0,m)}$ ($\mu=1,...,K_c+2$):

$$U_{k,\mu}^{(s,1)(m)'} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,1)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right), \quad k=1,...,K_c+2; \quad (3.236)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)(m)'} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,3)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} + Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right), \quad k=1,...,K_c; \quad (3.237)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,1)(m)''} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,2)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right), \quad k=1,...,K_c+2; \quad (3.238)$$

$$U_{k,\mu}^{(s,2)(m)''} = \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,4)} \left(P_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} - Q_{\nu,\mu}^{(s,p)(m)} \right), \quad k=1,...,K_c, \quad (3.239)$$

где

$$\delta_{0,1}^{(m)} = \frac{R_{0,m}}{R_{1,m}}; \quad (3.240)$$

$$e(p,\nu) = \begin{cases} \nu & \text{при } p=1,2; \\ -\nu & \text{при } p=3,4. \end{cases} \quad (3.241)$$

Формирование столбцов свободных членов обеих систем уравнений и их решение осуществляется на каждом шаге итерационного процесса.

15. На первом шаге процесса полагается ($j = 1, \dots, N$):

$$c_n^{(p)(0,j)} = 0 \quad (p = 1, 2; \quad n = 1, \dots, K_c + 2). \quad (3.242)$$

16. Вычисляются коэффициенты ($m = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, K_c + 2$):

$$c_k^{(3)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(1)(0,j)} + \right. \\ \left. + n \delta_{m,j}^{(0)} \left(\tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + (\varepsilon_{m,j})^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right]; \quad (3.243)$$

$$c_k^{(4)(m,j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \lambda_{j,m}) I_{k,n}^{(m,j)} c_n^{(2)(0,j)} - \tilde{I}_{k,n}^{(m,j)} \left((n+1) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} + n \overline{c_n^{(2)(0,j)}} \right) + \right. \\ \left. + n(n+1) \delta_{m,j}^{(0)} \left(\tilde{I}_{k-1,n+1}^{(m,j)} + \varepsilon_{m,j}^{-1} \tilde{I}_{k,n+1}^{(m,j)} \right) \overline{c_n^{(1)(0,j)}} \right]. \quad (3.244)$$

17. Вычисляются коэффициенты ($p = 3, 4$; $m = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, K_c$):

$$C_k^{(p)(m,j)} = c_k^{(p)(m,j)} + \tilde{c}_k^{(p)(m,j)}. \quad (3.245)$$

18. Вычисляются коэффициенты $L_k^{(l)(m)}$ ($l = 1, \dots, 4$; $m = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, K_c + 2$) в зависимости от вида нагрузки:

- в задаче 1

$$L_k^{(1)(m)} = \sum_{j=1}^N \left[(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] - \\ - \frac{\gamma R_{0,m}^2}{4} \left[-\lambda_{k,2} \left(i \frac{1-\lambda}{2} \cos \beta + \sin \beta \right) + 4\lambda_{k,1} h_m \left(\frac{1-\lambda}{2} \cos \beta - i \sin \beta \right) \right]; \quad (3.246)$$

$$L_k^{(2)(m)} = -\frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right]; \quad (3.247)$$

$$L_k^{(3)(m)} = \sum_{j=1}^N \left(C_k^{(3)(m,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \frac{\gamma R_{0,m}^2}{4} \cdot \frac{1+\lambda}{2} \cdot (4\lambda_{k,1} h_m + \\ + \lambda_{k,2} i) \cdot \cos \beta + \lambda_{k,2} \frac{i \overline{K_m}}{1 + \varepsilon_0}; \quad (3.248)$$

$$L_k^{(4)(m)} = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left(\mathfrak{a}_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \lambda_{k,2} \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{i \overline{K_m}}{1 + \mathfrak{a}_0}, \quad (3.249)$$

- в задаче 2, если сооружение на поверхности возводится после завершения работ по проходке и креплению тоннелей:

$$\begin{aligned} L_k^{(1)(m)} = & \sum_{j=1}^N \left[(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] + \\ & + \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \left\{ e^{2i\beta} \frac{1}{k+1} \left[\overline{\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^{k+1}} - \overline{\left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^{k+1}} \right] + \lambda_{k,1}(1-e^{2i\beta}) \ln \frac{\overline{z_m-b}}{z_m-a} + \right. \\ & + (1-e^{2i\beta}) \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\overline{\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^{k-1}} - \overline{\left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^{k-1}} \right] - \\ & \left. - e^{2i\beta} \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{1}{k} \left[a \overline{\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^k} - b \overline{\left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^k} \right] \right\}; \quad (3.250) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_k^{(2)(m)} = & -\frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left[(k+1)(\varepsilon_{m,j})^{-1} \overline{C_{k+1}^{(3)(m,j)}} + (k+2) \overline{C_{k+2}^{(3)(m,j)}} + \overline{C_k^{(4)(m,j)}} \right] - \\ & - \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \left\{ e^{2i\beta} \frac{1}{k+1} \left[\overline{\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^{k+1}} - \overline{\left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^{k+1}} \right] + \lambda_{k,1}(1-e^{2i\beta}) \ln \frac{\overline{z_m-b}}{z_m-a} + \right. \\ & + (1-e^{2i\beta}) \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\overline{\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^{k-1}} - \overline{\left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^{k-1}} \right] - \\ & \left. - e^{2i\beta} \frac{1}{R_{0,m}} \cdot \frac{1}{k} \left[a \overline{\left(\frac{R_{0,m}}{a-z_m} \right)^k} - b \overline{\left(\frac{R_{0,m}}{b-z_m} \right)^k} \right] \right\}; \quad (3.251) \end{aligned}$$

$$L_k^{(3)(m)} = \sum_{j=1}^N \left(C_k^{(3)(m,j)} + \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \left\{ \lambda_{k,1} \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] - \lambda_{k,1} e^{2i\beta} \ln \frac{\overline{z_m - b}}{z_m - a} \right\}; \quad (3.252)$$

$$L_k^{(4)(m)} = \frac{\mu_m}{\mu_0} \sum_{j=1}^N \left(\mathfrak{a}_0 C_k^{(3)(m,j)} - \lambda_{k,1} \overline{C_k^{(3)(m,j)}} \right) - \frac{iPR_{0,m}e^{-i\beta}}{2\pi} \left\{ \lambda_{k,1} \mathfrak{a}_0 \ln \frac{z_m - b}{z_m - a} + \right. \\ \left. + \mathfrak{a}_0 \left(\frac{\delta_{1,k}}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \left[\left(\frac{R_{0,m}}{a - z_m} \right)^{k-1} - \left(\frac{R_{0,m}}{b - z_m} \right)^{k-1} \right] + \lambda_{k,1} e^{2i\beta} \ln \frac{\overline{z_m - b}}{z_m - a} \right\}. \quad (3.253)$$

- в задаче 2, если сооружение на поверхности возводится до проходки тоннелей коэффициенты $L_k^{(l)(m)}$ ($l = 1, 3; m = 1, \dots, N$) вычисляются соответ-

ственно по формулам (3.250), (3.252), а коэффициенты $L_k^{(l)(m)}$

($l = 2, 4; m = 1, \dots, N$) полагаются равными нулю:

$$L_k^{(2)(m)} = 0, \quad L_k^{(4)(m)} = 0 \quad (k = 1, \dots, K_c + 2). \quad (3.254)$$

19. Определяются величины ($k = 1, \dots, K_c + 2, m = 1, \dots, N$)

$$M_k^{(1)(m)} = \frac{L_k^{(1)(m)} + L_k^{(2)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}; \quad M_k^{(2)(m)} = \frac{\mathfrak{a}_0 L_k^{(1)(m)} - L_k^{(2)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}; \\ M_k^{(3)(m)} = \frac{L_k^{(3)(m)} + L_k^{(4)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}; \quad M_k^{(4)(m)} = \frac{\mathfrak{a}_0 L_k^{(3)(m)} - L_k^{(4)(m)}}{1 + \mathfrak{a}_m}. \quad (3.255)$$

20. Определяются коэффициенты ($m = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K_c + 2$)

$$N_k^{(1)(m)} = M_k^{(1)(m)}; \quad N_k^{(2)(m)} = -\lambda_{k,1} M_k^{(3)(m)} + (1 - \lambda_{k,1})(k - 2) M_{k-2}^{(1)(m)} + \overline{M_k^{(4)(m)}}; \\ N_k^{(3)(m)} = M_k^{(3)(m)}; \quad N_k^{(4)(m)} = \overline{M_k^{(2)(m)}} - (k + 2) M_{k+2}^{(3)(m)}. \quad (3.256)$$

21. Вычисляем элементы столбцов свободных членов двух систем уравнений ($m = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, K_c + 2$):

$$Y_k^{(1)(m)'} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,1)} N_{\nu}^{(p)(m)*}, \quad k = 1, \dots, K_c + 2, \quad (3.257)$$

$$Y_k^{(2)(m)'} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,3)} N_{\nu}^{(p)(m)*}, \quad k = 1, \dots, K_c;$$

$$Y_k^{(1)(m)''} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,2)} N_{\nu}^{(p)(m)**}, \quad k = 1, \dots, K_c + 2; \quad (3.258)$$

$$Y_k^{(2)(m)''} = - \sum_{p=1}^4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(p,\nu)} T_{k,\nu}^{(p,4)} N_{\nu}^{(p)(m)**}, \quad k = 1, \dots, K_c.$$

22. Полученные системы уравнений решаются методом Гаусса относительно неизвестных действительных $c_{\mu}^{(s)(0,m)*}$ и мнимых $c_{\mu}^{(s)(0,m)**}$ частей комплексных коэффициентов $c_{\mu}^{(s)(0,m)}$ ($s = 1, 2$; $\nu = 1, \dots, N_s$), где

$$N_s = \begin{cases} K_c & \text{при } s = 1; \\ K_c + 2 & \text{при } s = 2. \end{cases} \quad (3.259)$$

23. С использованием вычисленных действительных и мнимых частей коэффициентов $c_{\mu}^{(1)(0,m)}$ ($\mu = 1, \dots, K_c$) и $c_{\mu}^{(2)(0,m)}$ ($\mu = 1, \dots, K_c + 2$) формируются коэффициенты $c_{\mu}^{(s)(0,m)}$ ($s = 1, 2$) в комплексном виде:

$$c_{\mu}^{(s)(0,m)} = c_{\mu}^{(s)(0,m)*} + i c_{\mu}^{(s)(0,m)**}. \quad (3.260)$$

24. Определяются абсолютные значения разностей между коэффициентами $c_{\mu}^{(s)(0,m)*}$, $c_{\mu}^{(s)(0,m)**}$ ($s = 1, 2$; $\mu = 1, \dots, N_s$), полученными в двух последовательных приближениях. Вычисления повторяются вновь, начиная с п. 12 до тех пор, пока величины разностей не станут меньше заданной величины точности ε (например, $\varepsilon = 10^{-6}$). Если заданная точность достигнута, вычисления продолжаются далее с п. 21. Если число выполняемых шагов

итерационного процесса превысит $I_{\max}$, то вычислительный процесс прекращается.

25. Определяются коэффициенты $c_k^{(l)(m)}$ ($m = 1, \dots, N$; $l = 1, \dots, 4$; $k = 1, \dots, N_l$):

$$c_k^{(l)(m)} = \left(\delta_{0,1}^{(m)} \right)^{e(l,k)} \left[\sum_{p=1}^2 \sum_{v=1}^{N_p} \left(P_{k,v}^{(p,l)(m)} c_v^{(p)(0,m)} + Q_{k,v}^{(p,l)(m)} \overline{c_v^{(p)(0,m)}} \right) + N_k^{(l)(m)} \right], \quad (3.261)$$

$$N_p = \begin{cases} K_c & \text{при } p = 1, 3; \\ K_c + 2 & \text{при } p = 2, 4. \end{cases} \quad (3.262)$$

26. Для каждого из контуров $L_{0,m}$ ($m = 1, \dots, N$) задавая значения угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси OX против хода часовой стрелки с заданным шагом $\Delta\theta$, например $\Delta\theta = 10^0$, определяются координаты точек контуров по формулам

$$z = z_m + R_{0,m} e^{i\theta}, \quad (3.263)$$

а также

$$y = \operatorname{Im} z. \quad (3.264)$$

27. Начальные радиальные $\sigma_r^{(0,m)(0)}$, нормальные тангенциальные $\sigma_\theta^{(0,m)(0)}$ и касательные $\tau_{r\theta}^{(0,m)(0)}$ напряжения при действии собственного веса пород вычисляются в точках z на контурах $L_{0,m}$:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left(\lambda \cos \beta \cos^2 \theta + \cos \beta \sin^2 \theta + 2 \sin \beta \sin \theta \cos \theta \right); \\ \sigma_\theta^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left(\lambda \cos \beta \sin^2 \theta + \cos \beta \cos^2 \theta - 2 \sin \beta \sin \theta \cos \theta \right); \\ \tau_{r\theta}^{(0,m)(0)} &= -\gamma(H_m - y) \left((1 - \lambda) \cos \beta \sin \theta \cos \theta + \sin \beta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right). \end{aligned} \quad (3.265)$$

28. В точках с координатами z определяются величины ($j=1, \dots, N$):

- в задаче 1

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) = & -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \right. \\ & - \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} \left\{ \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left[1 - (k+1) \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] + \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \Bigg\rangle - \\ & - \frac{1}{R_{0,j}} \cdot \frac{1}{1+\mathfrak{a}_0} \cdot \left\{ 2\overline{K_j} h_j \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} + \right. \\ & \left. + iK_j \left[\left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} + \mathfrak{a}_0 \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \right\}. \quad (3.266) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ & + \left\{ \left[(k+2) \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right) \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - 2 \right] \overline{c_k^{(1)(0,j)}} - \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \times \\ & \times \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \Bigg\rangle + \frac{4\overline{K_j} h_j}{(1+\mathfrak{a}_0)R_{0,j}^2} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-3} + \\ & + \frac{iK_j}{(1+\mathfrak{a}_0)R_{0,j}^2} \left[\left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-2} + \mathfrak{a}_0 \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} \right]; \quad (3.267) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-kc_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + k \left(2(k+1)\overline{c_k^{(1)(0,j)}} + \overline{kc_k^{(2)(0,j)}} \right) \times \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k(k+1)^2 \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \Bigg] - \\
& - \frac{2\overline{K_j} h_j}{1+\mathfrak{a}_0} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-2} - \frac{i\overline{K_j}}{1+\mathfrak{a}_0} \left[\mathfrak{a}_0 \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-1} + \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] \Bigg\}; (3.268)
\end{aligned}$$

- в задаче 2

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) = & -\frac{1}{R_{0,j}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} - \right. \\
& - \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} \left\{ \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \left[1 - (k+1) \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} \right] + \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \Bigg\rangle - \\
& - \lambda_{j,m} \frac{iPe^{-i\beta}}{2\pi} \ln \frac{z-b}{z-a}; (3.269)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) \left\langle c_k^{(1)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\
& + \left\{ \left[(k+2) \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right) \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-1} - 2 \right] \cdot \overline{c_k^{(1)(0,j)}} - \overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right\} \times \\
& \times \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \Bigg\rangle - \lambda_{j,m} \frac{iPe^{-i\beta}}{2\pi} \cdot \frac{b-a}{(z-b)(z-a)}; (3.270)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) = & \frac{1}{R_{0,j}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-kc_k^{(2)(0,j)} \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} \right)^{-(k+1)} + \right. \right. \\
& + k \left(2(k+1)\overline{c_k^{(1)(0,j)}} + k\overline{c_k^{(2)(0,j)}} \right) \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+1)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k(k+1)^2 \overline{c_k^{(1)(0,j)}} \cdot \frac{z-z_j}{R_{0,j}} \cdot \left(\frac{z-z_j}{R_{0,j}} - 2ih_j \right)^{-(k+2)} \Bigg] + \\
& + \lambda_{j,m} \frac{iP}{2\pi} \left[(e^{-i\beta} - e^{i\beta}) \ln \frac{z-b}{z-a} + e^{-i\beta} \left(\frac{\bar{b}}{z-b} - \frac{\bar{a}}{z-a} \right) \right]. \quad (3.271)
\end{aligned}$$

29. Дополнительные нормальные радиальные $\sigma_r^{(0,m)}$, нормальные тангенциальные $\sigma_\theta^{(0,m)}$ и касательные $\tau_{r\theta}^{(0,m)}$ напряжения в точках контуров $L_{0,m}$ ($m=1, \dots, N$) со стороны области S_0 (в массиве грунта) определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(0,m)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left[2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) - \overline{(z-z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) - \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right], \\
\sigma_y^{(0,m)} &= \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N \left[2\tilde{\varphi}'_{0,j}(z-z_j) + \overline{(z-z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right], \\
\tau_{xy}^{(0,m)} &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^N \left[\overline{(z-z_j)} \tilde{\varphi}''_{0,j}(z-z_j) + \tilde{\psi}'_{0,j}(z-z_j) \right]. \quad (3.272)
\end{aligned}$$

Вычисленные дополнительные напряжения являются полными в задаче 2.

30. В задаче 1 полные напряжения в точках массива на контурах $L_{0,m}$ ($m=1, \dots, N$) вычисляются как суммы:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_r^{(0,m)} &= \sigma_r^{(0,m)} + \sigma_r^{(0,m)(0)}; \\
\tilde{\sigma}_\theta^{(0,m)} &= \sigma_\theta^{(0,m)} + \sigma_\theta^{(0,m)(0)}; \\
\tilde{\tau}_{r\theta}^{(0,m)} &= \tau_{r\theta}^{(0,m)} + \tau_{r\theta}^{(0,m)(0)}. \quad (3.273)
\end{aligned}$$

31. Для определения напряжений в точках контуров $L_{0,m}$, $L_{1,m}$ колец S_m ($m=1, \dots, N$), моделирующих обделки тоннелей, определяются координаты соответствующих точек по формуле ($n=0, 1$):

$$z = z_m + R_{n,m} e^{i\theta}. \quad (3.274)$$

Угол θ в поперечном сечении каждой из областей S_m ($m=1,...,N$) отсчитывается от положительного направления оси OX против хода часовой стрелки с заданным шагом $\Delta\theta$, например $\Delta\theta = 10^0$.

32. В точках с координатами z определяются величины ($m=1,...,N$):

$$\varphi'_m(z - z_m) = \frac{1}{R_{1,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[-c_k^{(1)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(3)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-1} \right], \quad (3.275)$$

$$\begin{aligned} \varphi''_m(z - z_m) = \frac{1}{R_{1,m}^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[(k+1)c_k^{(1)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+2)} + \right. \\ \left. + (k-1)c_k^{(3)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-2} \right], \quad (3.276) \end{aligned}$$

$$\psi'_m(z - z_m) = \frac{1}{R_{1,m}} \sum_{k=1}^{\infty} k \left[-c_k^{(2)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{-(k+1)} + c_k^{(4)(m)} \left(\frac{z - z_m}{R_{1,m}} \right)^{k-1} \right]. \quad (3.277)$$

33. Дополнительные нормальные радиальные σ_r , нормальные тангенциальные σ_θ и касательные $\tau_{r\theta}$ напряжения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi'_m(z - z_m) - \left[\overline{(z - z_m)} \varphi''_m(z - z_m) + \psi'_m(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \sigma_\theta^{(m)} &= \operatorname{Re} \left\{ 2\varphi'_m(z - z_m) + \left[\overline{(z - z_m)} \varphi''_m(z - z_m) + \psi'_m(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}, \\ \tau_{r\theta}^{(m)} &= \operatorname{Im} \left\{ \left[\overline{(z - z_m)} \varphi''_m(z - z_m) + \psi'_m(z - z_m) \right] e^{2i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.278)$$

Приведенный алгоритм положен в основу разработанных программ, реализующих метод расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, на действие собственного веса грунта и нагрузки от веса объектов на поверхности. Программы написаны на языке программирования FORTRAN в среде WIN32 для компьютеров стандарта IBM PC.

3.4 Проверка точности удовлетворения граничных условий

Решения поставленных задач теории упругости получены с использованием разложений комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили, характеризующих напряженно-деформированное состояние рассматриваемых областей, в ряды Лорана. Очевидно, что точность получаемых результатов существенным образом зависит от количества K_C удерживаемых членов в этих рядах.

С помощью разработанных программ были выполнены численные эксперименты по установлению минимального числа K_C , необходимого для достижения достаточно высокой точности расчета.

С этой целью были выполнены многовариантные расчеты для двух различных подкрепленных круговых отверстий, моделирующих обделки параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона.

Расчеты выполнялись для различных углов наклона β земной поверхности, глубин заложения комплекса тоннелей, модулей деформации E_0 среды и модулей деформации E_j ($j=1, 2$) материалов колец, моделирующих обделки тоннелей, расстояний l между центрами отверстий, наружных $R_{0,j}$ и внутренних $R_{1,j}$ ($j=1, 2$) радиусов колец, подкрепляющих отверстия.

Проверка удовлетворения граничных условий проводилась на прямолинейной границе L'_0 - отсутствие нормальных σ_y и касательных τ_{xy} напряжений в задаче 1, либо наличие нормальных $\sigma_y = -P \cos \beta$ и касательных $\tau_{xy} = P \sin \beta$ напряжений на отрезке $[a_0, b_0]$ в задаче 2; на наружных контурах колец $L_{0,j}$ ($j=1, 2$) - погрешность равенства нормальных радиальных σ_r и касательных $\tau_{r\theta}$ напряжений; на внутренних контурах $L_{1,j}$ ($j=1, 2$) колец - выполнение условий $\sigma_r = 0$, $\tau_{r\theta} = 0$.

Результаты исследований показали различный характер зависимостей погрешности удовлетворения граничных условий на разных контурах для нормальных радиальных σ_r и касательных $\tau_{r\theta}$ напряжений от числа K_c удерживаемых членов в рядах. Общим является то, что с увеличением числа удерживаемых членов рядов точность удовлетворения граничных условий возрастает.

Выполненные исследования позволяют сделать вывод о том, что поставленные граничные условия задач, соответствующих реальному взаимному расположению тоннелей, на всех контурах поперечного сечения обделок и прямолинейной границе выполняются с погрешностью, не превышающей 2...3% при числе удерживаемых членов, превышающих $K_c = 20$.

Сделанный вывод подтверждается расчетами при весьма малой ширине перемычки (целика) между отверстиями, составляющими не менее $0,25R_{0,j}$, и расстоянии $H = 1,25R_{0,1}$.

Результаты проведенных исследований позволяют уменьшить время выполнения расчетов с применением разработанных программ и требуемый объем оперативной памяти ЭВМ.

Выводы

1. Выполнен переход от поставленных задач теории упругости к соответствующим краевым задачам ТФКП, сформулированы их граничные условия с использованием потенциалов Колосова-Мусхелишвили.

2. Решения поставленных задач теории упругости получены с помощью математического аппарата ТФКП.

3. Приведены основные этапы решения задач с применением аналитического продолжения комплексных потенциалов, теоремы Сохоцкого-Племеля, свойств интегралов типа Коши и рядов Лорана.

4. Решение каждой из поставленных задач о напряженном состоянии колец, подкрепляющих конечное число круговых отверстий в полуплоскости с наклонной границей сведено к сходящемуся итерационному процессу, на каждом шаге которого решается задача о напряженном состоянии кольца, подкрепляющего одно круговое отверстие в полной плоскости при граничных условиях, содержащих дополнительные члены в виде рядов Лорана, отвечающие за влияние наклонной границы и соседних подкрепленных отверстий.

5. Составлен полный алгоритм расчета, реализованный в виде компьютерных программ, позволяющих определять напряженное состояние массива грунта и обделок параллельных тоннелей, расположенных вблизи наклонной земной поверхности.

6. Проверка точности удовлетворения граничных условий в процессе отладки программ показала их выполнение с погрешностью, не превышающей 2...3%.

4 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОГРАММЫ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ РАЗРАБОТАННЫЙ МЕТОД. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ С ДАННЫМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ ДРУГИМИ АВТОРАМИ

4.1 Примеры расчета

Ниже приведены примеры, иллюстрирующие возможности разработанного метода. Следует отметить, что все результаты, кроме приведенных в п. 4.1.5, соответствуют случаю одновременной проходки выработок и их крепления непосредственно в забое, что соответствует наихудшему сочетанию технологических факторов. Приведенные расчетные результаты могут быть использованы для учета последовательности сооружения горных выработок согласно методике, приведенной в [6].

4.1.1 Определение напряженного состояния массива грунта вокруг двух параллельных незакрепленных выработок, расположенных вблизи склона

Ниже на рис. 4.1 приведены расчетные схемы для различных вариантов расположения параллельных выработок, пройденных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности [7, 8, 12, 16, 17, 69, 120].

Расчеты выполнены при следующих исходных данных: характеристики грунта - $E_0 = 50 \text{ МПа}$, $\nu_0 = 0,2$, $\gamma = 0,022 \text{ кН/м}^3$, $\lambda = 0,3$; угол наклона земной поверхности $\beta = 30^\circ$; радиусы поперечных сечений выработок $R = 1 \text{ м}$; глубина заложения первой выработки (левой – рис. 4.1 а, верхней – рис. 4.1 б) $H = 2R = 2 \text{ м}$. Координаты центра сечения второй выработки $x_2 = 3 \text{ м}$, $y_2 = 0 \text{ м}$ и $x_2 = 0 \text{ м}$, $y_2 = -3 \text{ м}$ соответственно при расположении центров на одной горизонтали (рис. 4.1 а) и вертикали (рис. 4.1 б).

На рис. 4.2 приведены эпюры расчетных нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих на контурах выработок, центры которых расположены на одной горизонтали. Здесь и далее сжимающие напряжения считаются отрицательными, а растягивающие – положительными.

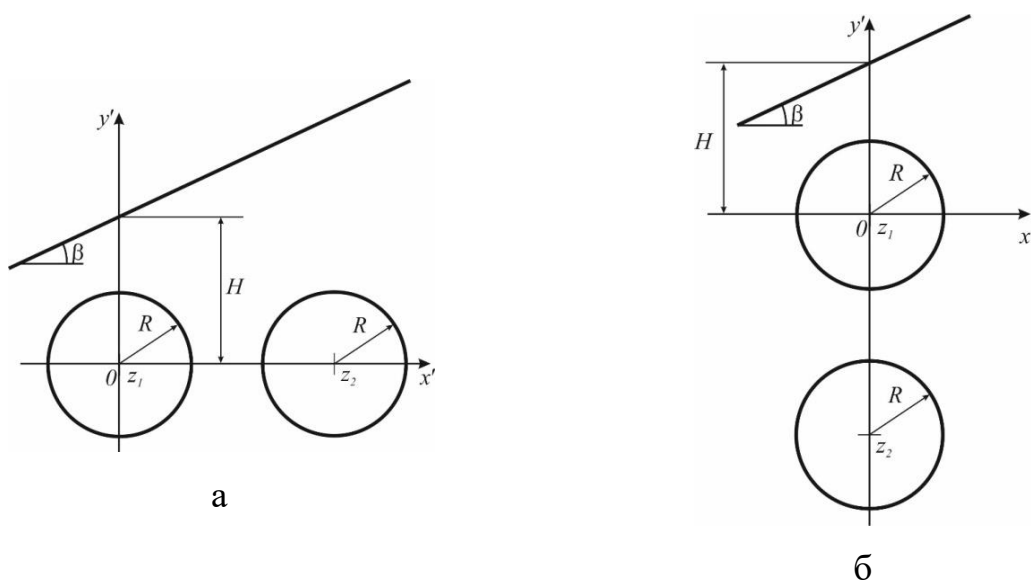


Рисунок 4.1 - Расчетные схемы при расположении центров поперечных сечений выработок: а - на горизонтали; б - на вертикали

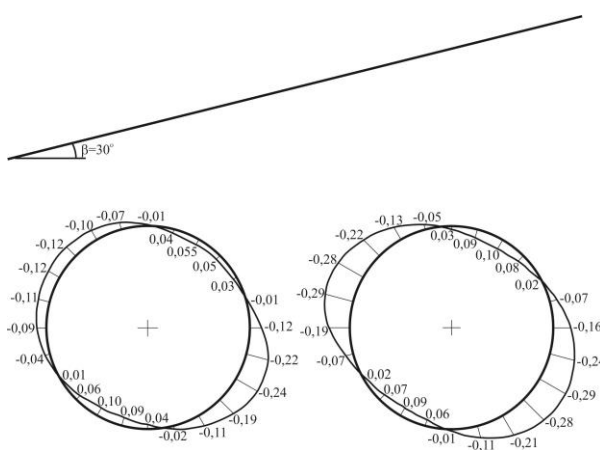


Рисунок 4.2 - Эпюры напряжений σ_θ , МПа, возникающих на контурах выработок, центры которых расположены на одной горизонтали

Из представленных на рис. 4.2 эпюр следует, что на контурах обеих выработок возникают как сжимающие (отрицательные), так и растягивающие (положительные) нормальные тангенциальные напряжения. Максимальные значения сжимающих напряжений на контуре первой выработки составляют $0,24 \text{ МПа}$ в сечениях при $\theta = 330^0$; на контуре второй – $0,29 \text{ МПа}$ возникают в сечениях при $\theta = 165^0$ и $\theta = 330^0$. Максимальные значения растягивающих напряжений на контуре первой выработки составляют $0,1 \text{ МПа}$ в сечениях при $\theta = 240^0$; на контуре второй - также $0,1 \text{ МПа}$ возникают в сечениях при $\theta = 60^0$.

На рис. 4.3 приведены эпюры нормальных напряжений, возникающих в точках грунтового целика между выработками - $\sigma_{y'}$, МПа при горизонтальном (4.3 а) и $\sigma_{x'}$, МПа при вертикальном (4.3 б) расположениях. Следует отметить, что в точках целика возникают только сжимающие нормальные напряжения.

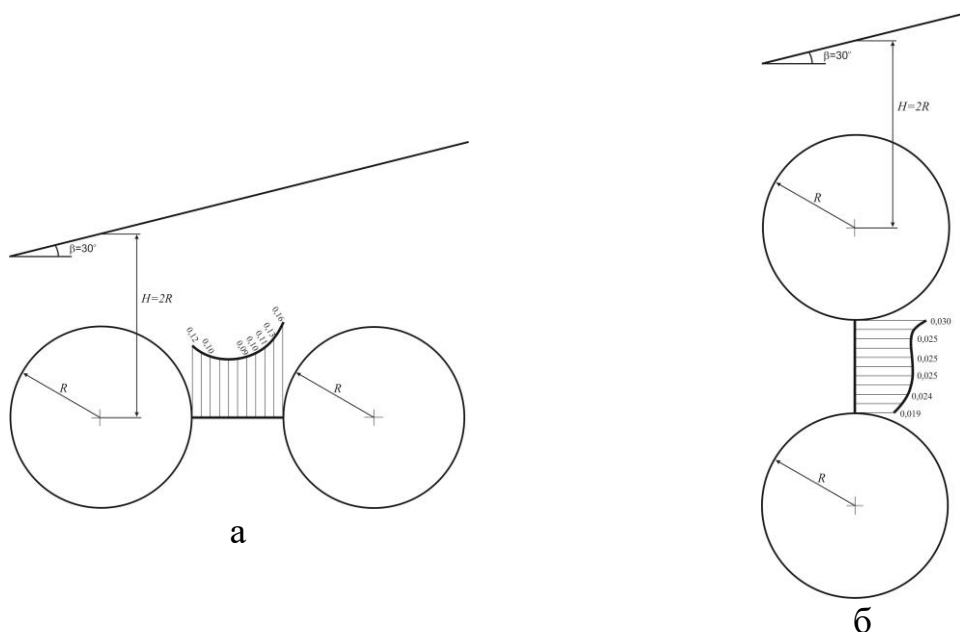


Рисунок 4.3 - Эпюры напряжений в точках целика:

а – центры сечений выработок расположены на горизонтали;

б – центры сечений выработок расположены на вертикали

Как следует из рис. 4.3 а наблюдается различие между напряжениями в начале (точка контура левого отверстия) и в конце целика (точка контура правого отверстия). Причиной этого является фактически увеличенная за счет наклона поверхности глубина заложения второй выработки.

Из расчетов для вертикально расположенных выработок (рис. 4.3 б) следует, что напряжения в верхней точке целика (контур первой выработки) превышают напряжения в нижней точке целика (контур второй выработки).

Зоны неупругих деформаций определены с использованием условия прочности Кулона-Мора $(\sigma_{x'} - \sigma_{y'})^2 + 4\tau_{x'y'}^2 < (\sigma_{x'} + \sigma_{y'} + 2A)^2 \sin^2 \varphi$, $A = C \cdot \operatorname{ctg} \varphi$, где сцепление грунта $C = 5 \text{ МПа}$, угол внутреннего трения $\varphi = 58^\circ$.

На рис. 4.4 приведены результаты определения форм и размеров условных зон неупругих деформаций в массиве грунта для горизонтального (рис. 4.4 а) и вертикального (рис. 4.4 б) расположения сечений выработок. Пунктиром на рис. 4.4 а показаны эти зоны для одиночной выработки.

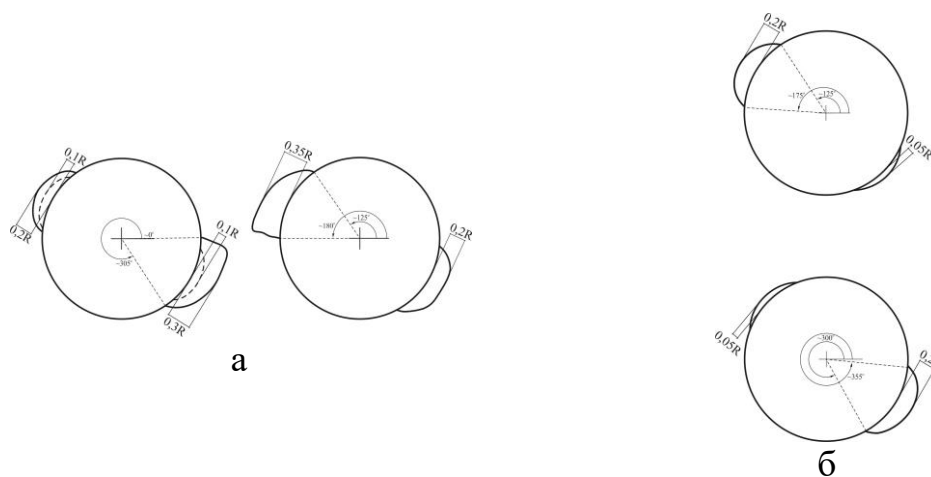


Рисунок 4.4 - Зоны неупругих деформаций в массиве грунта
а - центры сечений выработок расположены на горизонтали;
б - центры сечений выработок расположены на вертикали

На рис. 4.5 приведены эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках контуров поперечных сечений каждой из выработок при угле наклона земной поверхности $\beta = 45^\circ$.

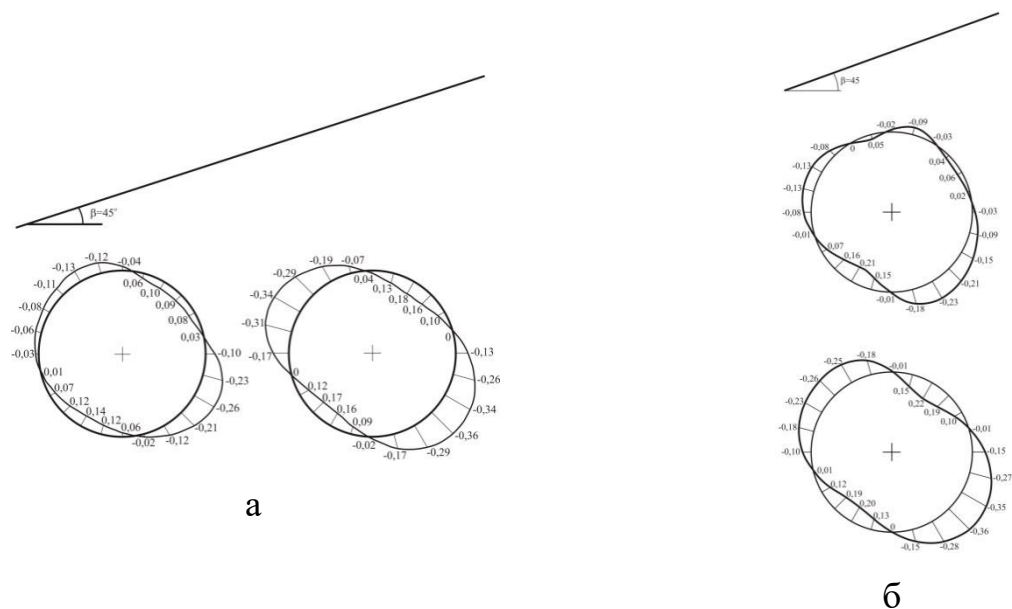


Рисунок 4.5 - Эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа:

а – центры поперечных сечений на горизонтали;

б – центры поперечных сечений на вертикали

На рис. 4.6 представлены эпюры вертикальных напряжений $\sigma_{y'}$, МПа в целике между выработками с центрами, расположенными на горизонтали при $\beta = 45^\circ$.

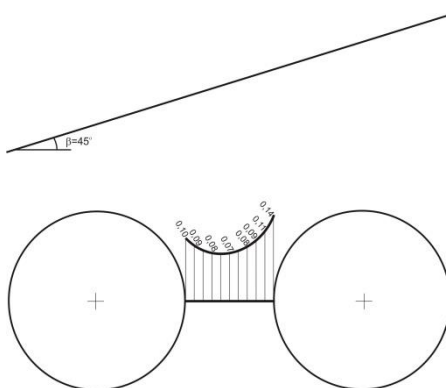


Рисунок 4.6 - Эпюры напряжений $\sigma_{y'}$, МПа в точках целика

Эпюры нормальных напряжений $\sigma_{\chi'}$, МПа в точках целика между выработками, центры поперечных сечений которых расположены вертикально, при разных углах наклона земной поверхности представлены на рис. 4.7.

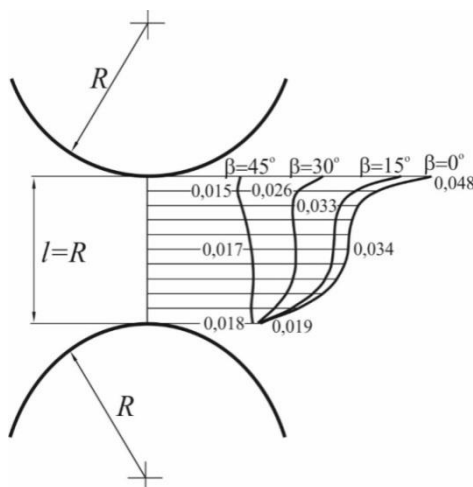


Рисунок 4.7 - Эпюры сжимающих нормальных напряжений в точках целика при различных углах β наклона поверхности

Из представленных результатов следует, что напряжения в целике уменьшаются по абсолютной величине с увеличением угла наклона земной поверхности вблизи выработок. Максимальные напряжения возникают при $\beta = 0^\circ$ (горизонтальная поверхность), а минимальные - при $\beta = 45^\circ$.

4.1.2 Определение напряженного состояния обделок двух параллельных тоннелей с одинаковыми поперечными сечениями

Расчеты монолитных бетонных обделок выполнялись при следующих исходных данных: $E_0 = 1000$ МПа, $\nu_0 = 0,35$, $\gamma = 0,022$ МН/м³, $\lambda = 0,53$; $H = 9$ м; $l = 9$ м; $R_{0,1} = R_{0,2} = 3,0$ м, $R_{1,1} = R_{1,2} = 2,7$ м, $E_1 = E_2 = 27000$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$, $\beta = 30^\circ$. Расчетная схема приведена на рис. 4.8.

Для иллюстрации влияния наклонной земной поверхности на формирование напряженного состояния обделок на рис. 4.9 приведены эпюры расчетных нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа,

возникающих на наружном и внутреннем контурах поперечного сечения обделки левого тоннеля при горизонтальной земной поверхности. Очевидно, что представленные результаты справедливы для правого тоннеля с учетом осевой симметрии.

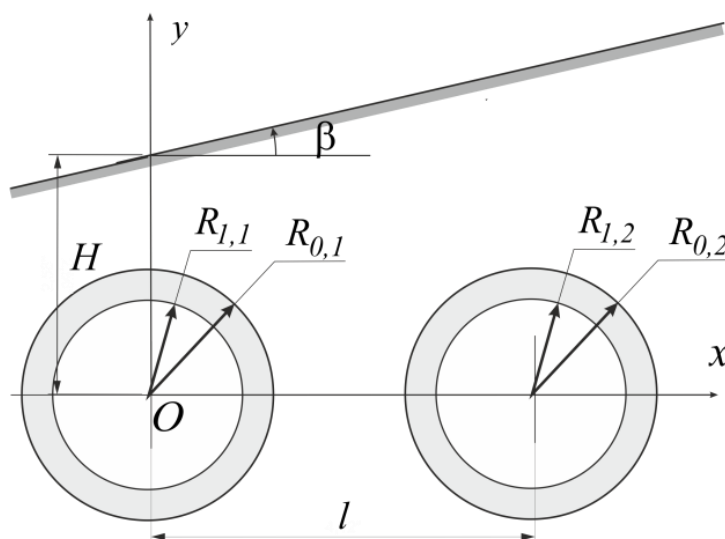


Рисунок 4.8 - Поперечное сечение тоннелей

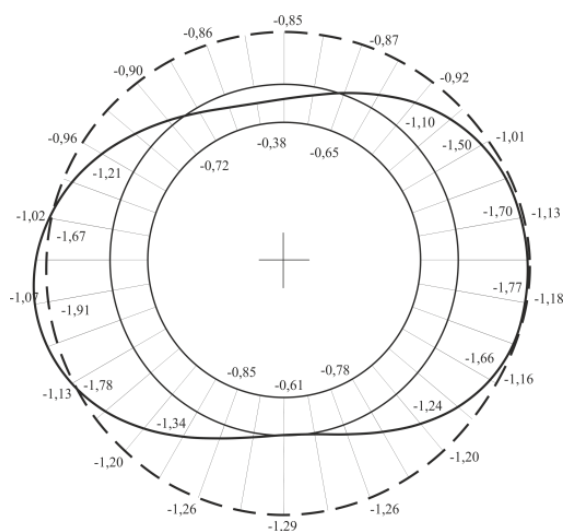


Рисунок 4.9 - Напряжения на наружном (пунктирная линия) и внутреннем (сплошная линия) контурах обделки левого тоннеля при $\beta = 0^\circ$

На рис. 4.10 а, б приведены эпюры напряжений $\sigma_\theta, \text{МПа}$, возникающих в точках наружного и внутреннего контуров поперечного сечения обделок тоннелей, сооруженных вблизи склона с $\beta = 30^\circ$.

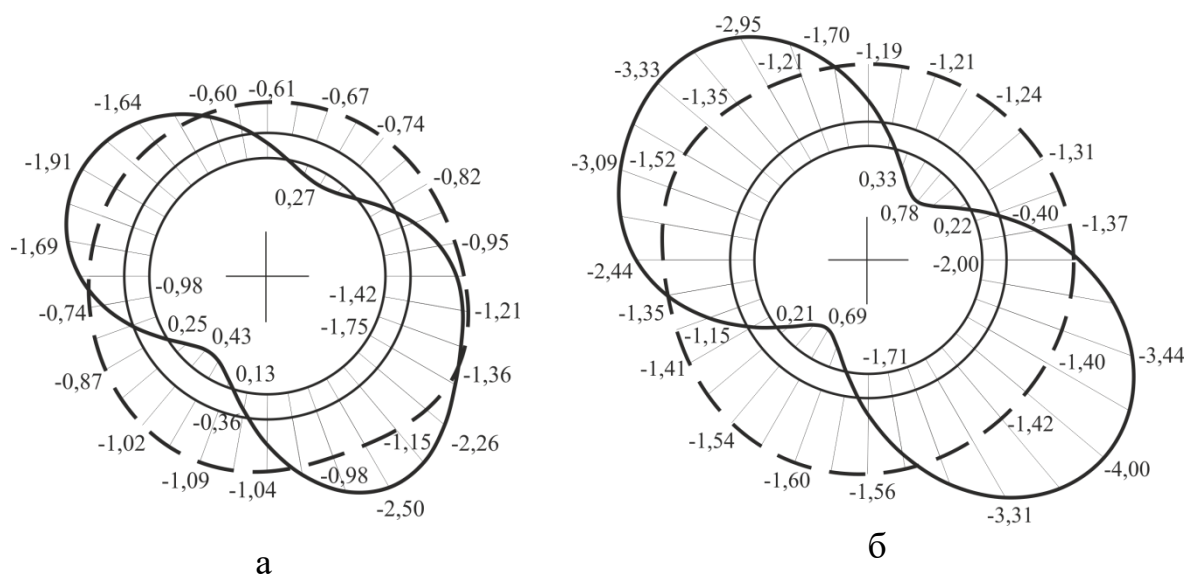


Рисунок 4.10 - Напряжения на наружном (пунктирные линии) и внутреннем (сплошные линии) контурах обделок тоннелей при $\beta = 30^\circ$:

а - левого; б - правого

Как следует из эпюр напряжений, изображенных на рис. 4.9, 4.10 наличие наклонной земной поверхности приводит к существенному перераспределению напряжений в обделках тоннелей.

4.1.3 Определение напряженного состояния обделок двух параллельных тоннелей с различными размерами поперечных сечений

Исходные данные для расчета: глубина заложения первого тоннеля по вертикали $H = 10 \text{ м}$; центры $z_m (m=1,2)$ сечений выработок имеют координаты $(0, 0)$ и $(12, 0)$; наружный и внутренний радиусы сечения обделки первого тоннеля $R_{0,1} = 3,5 \text{ м}$, $R_{1,1} = 3,0 \text{ м}$ и $R_{0,2} = 5,2 \text{ м}$,

$R_{1,2} = 4,7$ м для второго; деформационные характеристики массива пород $E_0 = 2300$ МПа, $\nu_0 = 0,35$ (алевролиты), удельный вес $\gamma = 0,022$ МН/м³, коэффициент бокового давления $\lambda = 0,53$; деформационные характеристики материала обделок тоннелей $E_1 = E_2 = 36000$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$ [9, 10]. Расчетная схема приведена на рис. 4.11.

Первоначально для изучения влияния угла наклона поверхности на напряженное состояние подземных конструкций были выполнены расчеты при $\beta = 0^\circ$, т.е. для случая, когда близко расположенные параллельные тоннели сооружены вблизи горизонтальной земной поверхности. Расчетные эпюры нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках наружного и внутреннего контуров поперечного сечения обделок обоих тоннелей, представлены на рис. 4.12 а, б.

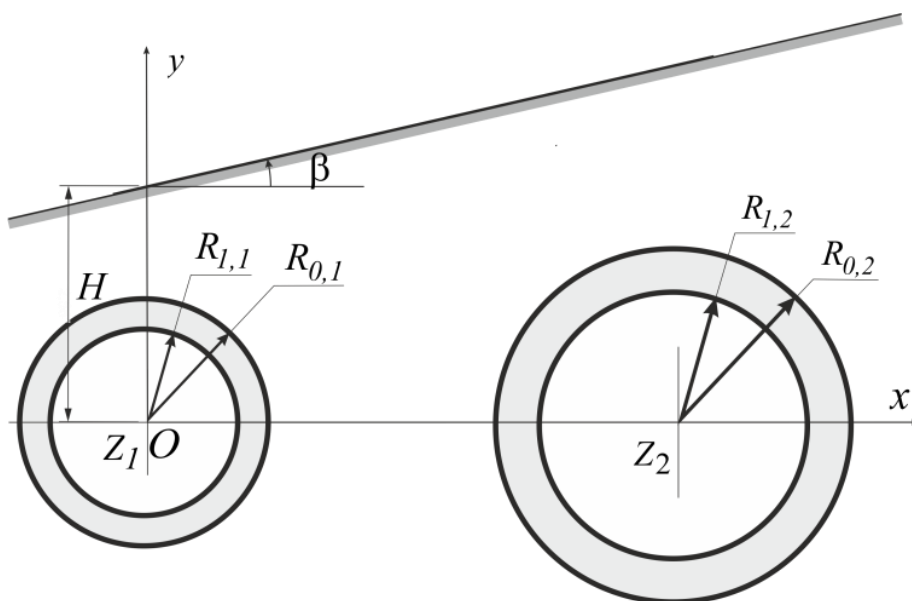


Рисунок 4.11 - Поперечное сечение комплекса выработок

На рис. 4.13 а, б приведены эпюры напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках наружного и внутреннего контуров поперечного

сечения обделок тоннелей, сооруженных вблизи склона с преобладающим углом наклона $\beta = 45^\circ$.

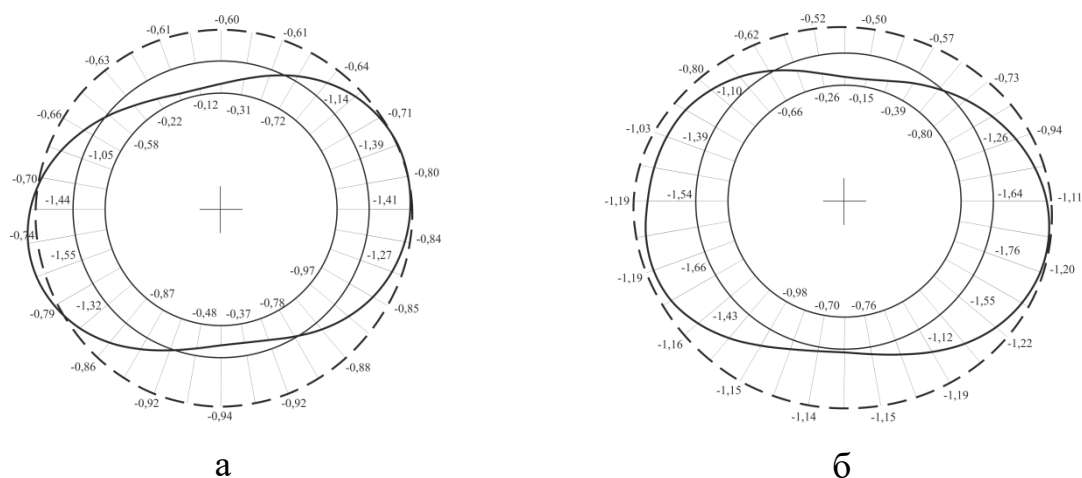


Рисунок 4.12 - Эпюры напряжений σ_θ , МПа на наружном (пунктирная линия) и внутреннем (сплошная линия) контурах обделок левого (а) и правого (б) тоннелей при $\beta = 0^\circ$

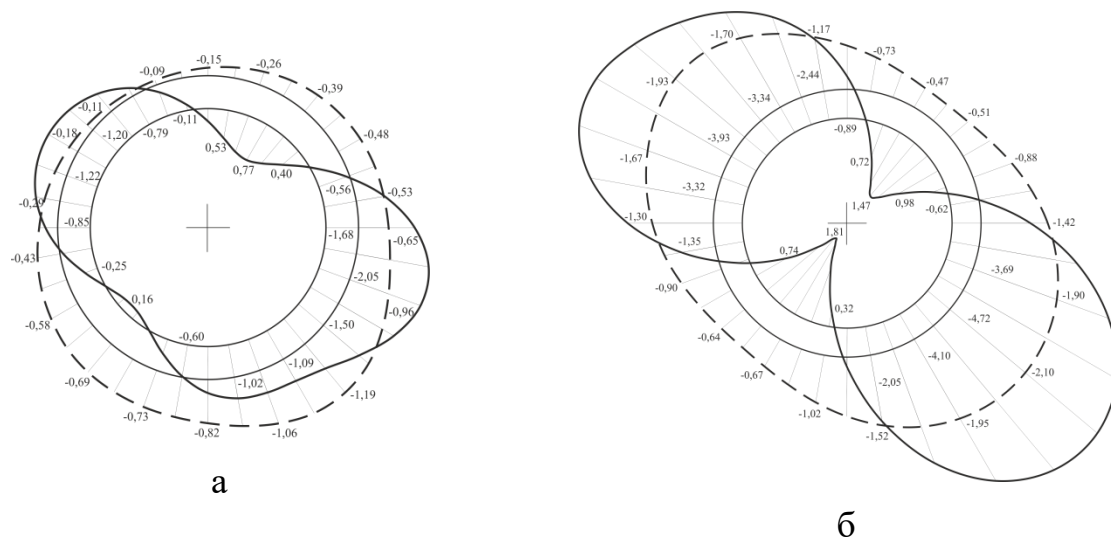


Рис. 4.13 - Эпюры напряжений σ_θ , МПа на наружном (пунктирная линия) и внутреннем (сплошная линия) контурах обделок левого (а) и правого (б) тоннеля при $\beta = 45^\circ$

Как следует из эпюр напряжений, изображенных на рис. 4.12, 4.13, наличие наклонной земной поверхности приводит к существенному

перераспределению напряжений в подземных конструкциях. Так, например, в обделках тоннелей, пройденных под горизонтальной поверхностью, отсутствуют растягивающие нормальные тангенциальные напряжения.

Максимальные значения сжимающих (отрицательных) напряжений на наружном контуре сечения обделки левого тоннеля равны $-1,55 \text{ МПа}$ и $-1,76 \text{ МПа}$ в обделке правого тоннеля соответственно, максимальные значения напряжений на внутреннем контуре левого тоннеля составляют $-0,94 \text{ МПа}$ и $-1,22 \text{ МПа}$ соответственно.

При сооружении тоннелей вблизи наклонной земной поверхности – угол наклона принят равным 45° – на внутренних контурах сечения обделках обоих тоннелей возникают достаточно большие растягивающие напряжения: в левом тоннеле $0,77 \text{ МПа}$, в правом тоннеле – $1,81 \text{ МПа}$, что представляет опасность для материала обделки (бетона). Максимальные сжимающие напряжения в сечениях обделки левого тоннеля составляют на наружном контуре $-1,19 \text{ МПа}$, на внутреннем – $-2,05 \text{ МПа}$; в сечениях обделки правого тоннеля на наружном контуре равны $-2,10 \text{ МПа}$ и $-4,72 \text{ МПа}$ на внутреннем. Следует отметить изменение положения радиальных сечений, в которых возникают экстремальные напряжения. Результаты расчета соответствуют случаю возведения обделок непосредственно в забое тоннеля, что соответствует, в определенной мере, щитовому способу проходки, и не учитывают последовательность сооружения тоннелей (наихудший случай).

4.1.4 Определение напряженного состояния обделок трех параллельных тоннелей с различными размерами поперечных сечений

Ниже представлены результаты определения напряженного состояния обделок трех параллельных тоннелей, центры поперечных сечений которых расположены на одной горизонтальной линии. На рис. 4.14 изображены поперечные сечения тоннелей и приведены основные исходные данные.

$$\gamma = 0,022 \text{ МН} / \text{м}^3, \lambda = 0,53; E_0 = 1000 \text{ МПа}, \nu_0 = 0,3$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 36000 \text{ МПа}; \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,2$$

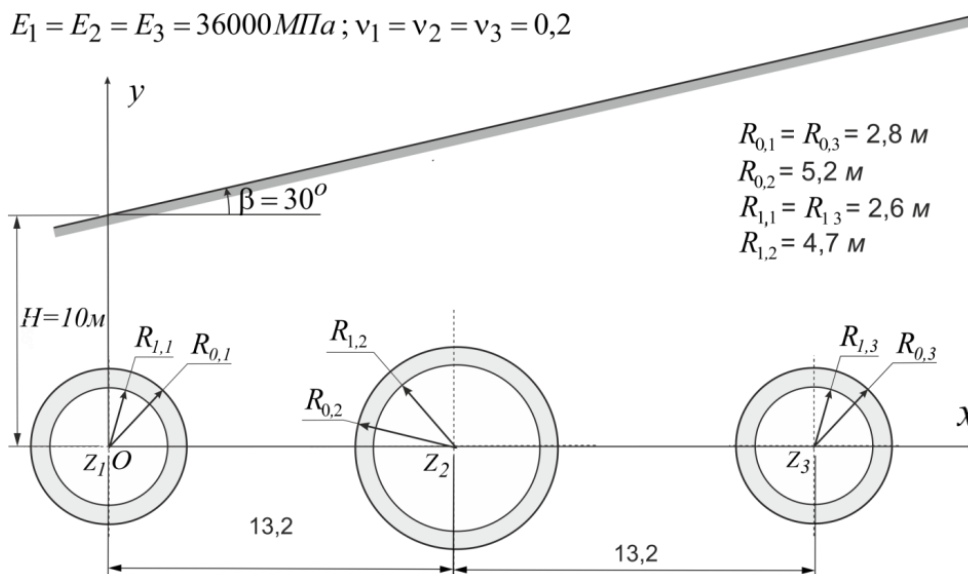


Рисунок 4.14 - Поперечное сечение тоннелей и основные исходные данные

На рис. 4.15 представлены эпюры расчетных нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , возникающих в точках наружного (рис. 4.15 а, б, в) и внутреннего (рис. 4.15 г, д, е) контуров поперечного сечения обделок тоннелей.

Из рис. 4.15 следует, что на наружных контурах сечений обделок возникают только сжимающие нормальные тангенциальные напряжения σ_θ , величина которых возрастает с увеличением глубины заложения тоннелей (рис. 4.15 а, б, в).

В точках внутренних контуров сечения левого тоннеля возникают только сжимающие напряжения, а в сечениях второго и третьего как сжимающие, так и растягивающие напряжения.

Приведенные эпюры напряжений свидетельствуют о значительном взаимном влиянии достаточно близко расположенных параллельных тоннелей.

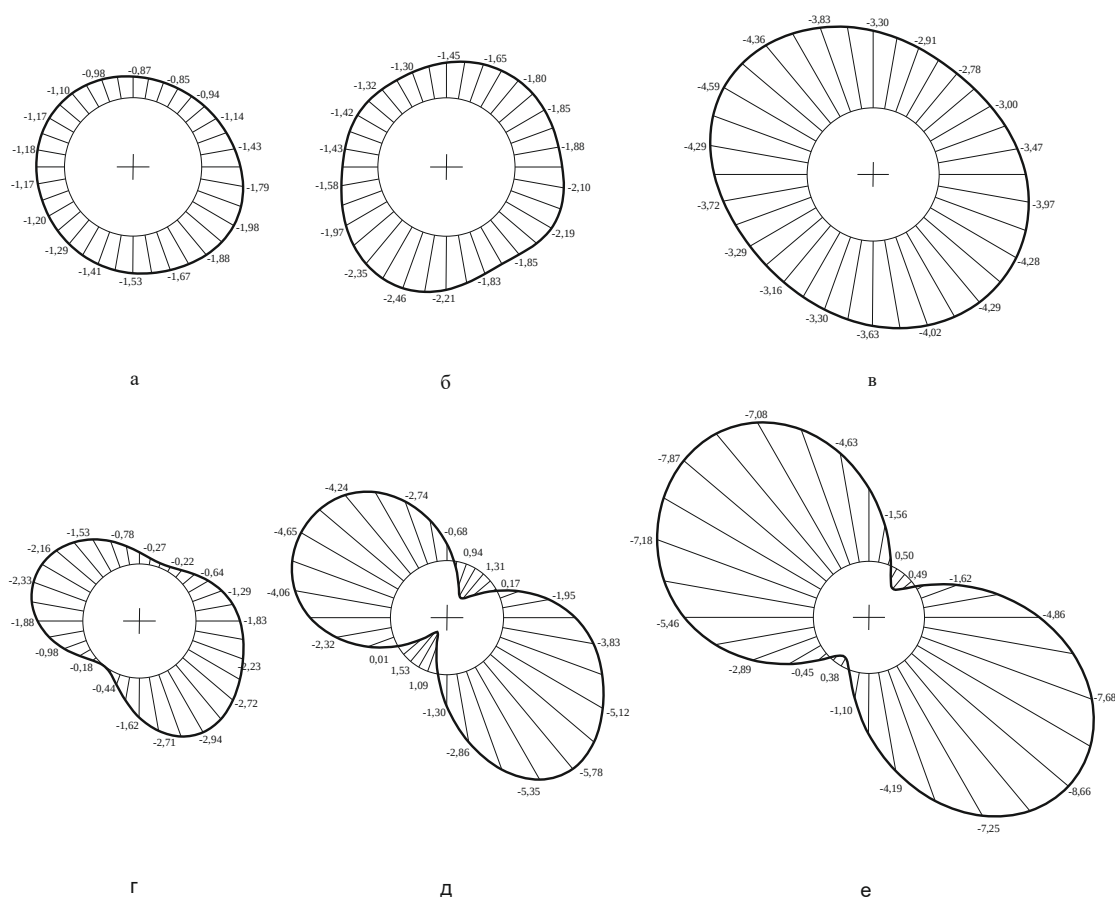


Рисунок 4.15 - Эпюры напряжений σ_{θ} , МПа в точках наружных (а, б, в) и внутренних (г, д, е) контуров поперечных сечений каждого из тоннелей

Рост фактической глубины заложения тоннелей при их проходке вблизи наклонной земной поверхности приводит к существенному изменению напряженного состояния обделок.

4.1.5 Определение напряженного состояния обделок параллельных тоннелей с учетом последовательности сооружения тоннелей и отставания возведения обделок при действии собственного веса грунта и веса объекта на поверхности

Ниже приведены результаты определения напряженного состояния обделок из бетонных блоков тоннелей с радиусами в проходке $R_{0,1} = R_{0,2} = 3,2$ м на различных этапах их сооружения вблизи наземного

объекта, расположенного на поверхности с углом наклона $\beta = 15^\circ$ [15].

Расчетная схема сечений тоннелей приведена на рис. 4.16.

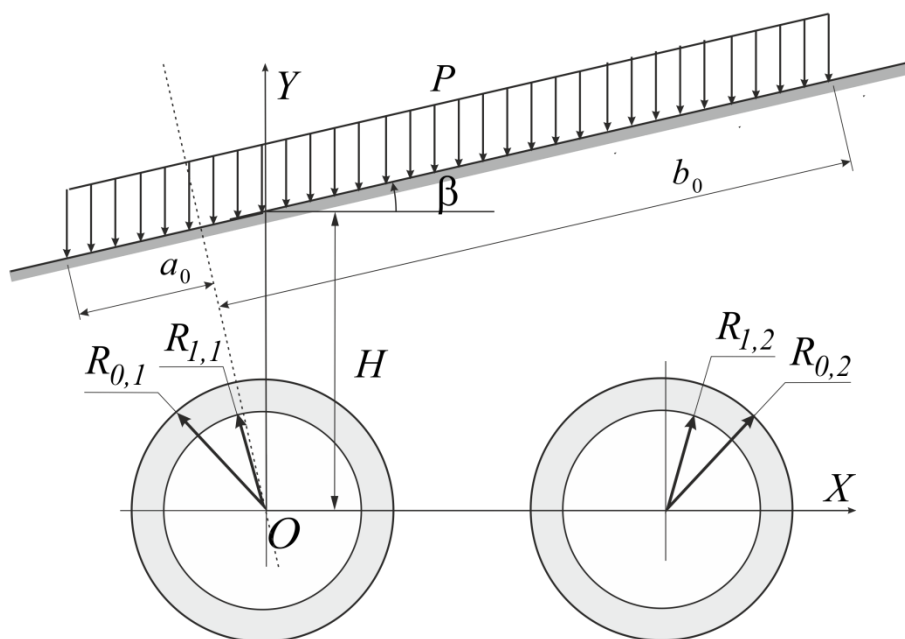


Рисунок 4.16 - Поперечное сечение тоннелей

Выработки проходятся в тонкослоистых твердых глинах с удельным весом $\gamma = 21,5 \text{ кН} / \text{м}^3$, модулем деформации $E_0 = 300 \text{ МПа}$ и коэффициентом Пуассона $\nu_0 = 0,35$. Коэффициент бокового давления принят равным $\lambda = 0,5$. Глубина заложения первой (левой) выработки $H = 10 \text{ м}$. Центр поперечного сечения первой выработки имеет координаты $z_1 = (0 \text{ м}; 0 \text{ м})$; второй, расположенной справа, - $z_2 = (9 \text{ м}; 0 \text{ м})$.

Первой проходится левый тоннель, в котором с отставанием $l_1 = 0,9 \text{ м}$ от забоя возводится обделка; правый тоннель возводится после полного сооружения и закрепления первого. Отставание возведения обделки от забоя во втором тоннеле составляет $l_2 = 0,9 \text{ м}$. Обделки выполнены из бетонных блоков толщиной $\Delta = 0,3 \text{ м}$, таким образом, $R_{l,1} = R_{l,2} = 2,9 \text{ м}$;

деформационные характеристики бетона блоков приняты равными $E_1 = E_2 = 36000 \text{ МПа}$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$.

Вес объекта (здания) с поперечным размером 20 м моделируется вертикальной равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью $P = 0,15 \text{ МН/м}$, действующей на участке, левая граница которого имеет абсциссу $a_0 = -5 \text{ м}$ в наклонной системе координат, и, соответственно, абсциссу правой границы $b_0 = 15 \text{ м}$.

Результаты определения расчетных нормальных тангенциальных напряжений σ_θ , возникающих в точках внутреннего контуров поперечного сечения выработок, представлены в виде эпюр на рис. 4.17 – 4.21.

На рис. 4.17 приведены эпюры расчетных напряжений σ_θ , МПа на контуре неподкрепленной первой (левой) выработки от действия собственного веса грунта для трех случаев: без учета влияния земной поверхности (рис. 4.17 а); при горизонтальной земной поверхности (рис. 4.17 б); при наклонной земной поверхности (рис. 4.17 в).

Расчеты показывают, что в массиве грунта в точках контура поперечного сечения выработки при принятых исходных данных для всех трех случаев возникают только сжимающие (отрицательные) нормальные тангенциальные напряжения.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что учет влияния земной поверхности, в том числе – наклонной, при определении напряженного состояния массива пород вблизи контура выработки приводит к изменению напряженного состояния.

Расчетные напряжения в точках свода выработки, пройденной вблизи горизонтальной земной поверхности, по сравнению с результатами, полученными для выработки, расположенной на той же глубине, без учета поверхности, уменьшаются на 43%, в подошве – на 13%, а напряжения в точках горизонтального диаметра, являющиеся максимальными, напротив, возрастают не более чем на 3% (рис. 4.17 а, б).

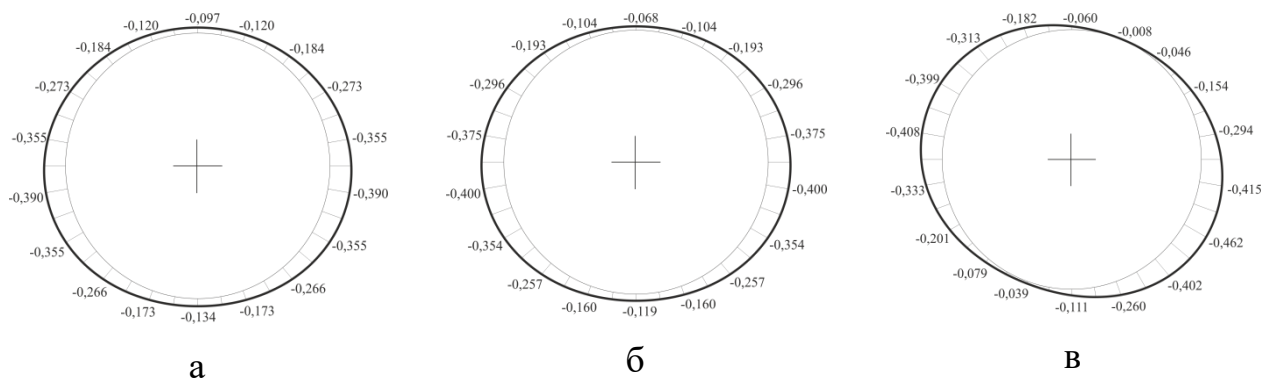


Рисунок 4.17 - Результаты расчета для незакрепленной выработки:
 а - без учета влияния земной поверхности; б - при горизонтальной земной
 поверхности; в - при наклонной земной поверхности ($\beta = 15^0$)

Таким образом, учет близко расположенной горизонтальной земной поверхности приводит в данном случае к значительному уменьшению расчетных напряжений в своде и подошве выработки, оставляя практически неизменными напряжения в боках выработки.

Результаты расчета для случая наклонной земной поверхности (рис. 4.17 в) показывают, что происходит существенное перераспределение напряжений – эпюра не имеет вертикальной оси симметрии, а максимальные напряжения, увеличившиеся на 13% по сравнению с напряжениями в случае горизонтальной поверхности (рис. 4.17 б), возникают в радиальных сечениях при $\theta = 330^0$.

На рис. 4.18 приведены эпюры расчетных напряжений σ_θ , МПа, возникающих на внутреннем контуре бетонной крепи, установленной с отставанием $l = 0,9$ м от забоя в первой выработке до проходки второй, от действия собственного веса грунта: при горизонтальной земной поверхности (рис. 4.18 а); при наклонной земной поверхности (рис. 4.18 б).

Учет отставания возведения обделок от забоя выработки выполняется путем умножения значений напряжений на корректирующий множитель α^* , определяемый согласно [6], и принимающий значение $\alpha^* = 0,694$.

Полученные результаты показывают, что в точках внутреннего контура поперечного сечения крепи выработки для обоих случаев возникают как сжимающие (отрицательные), так и растягивающие (положительные) нормальные тангенциальные напряжения.

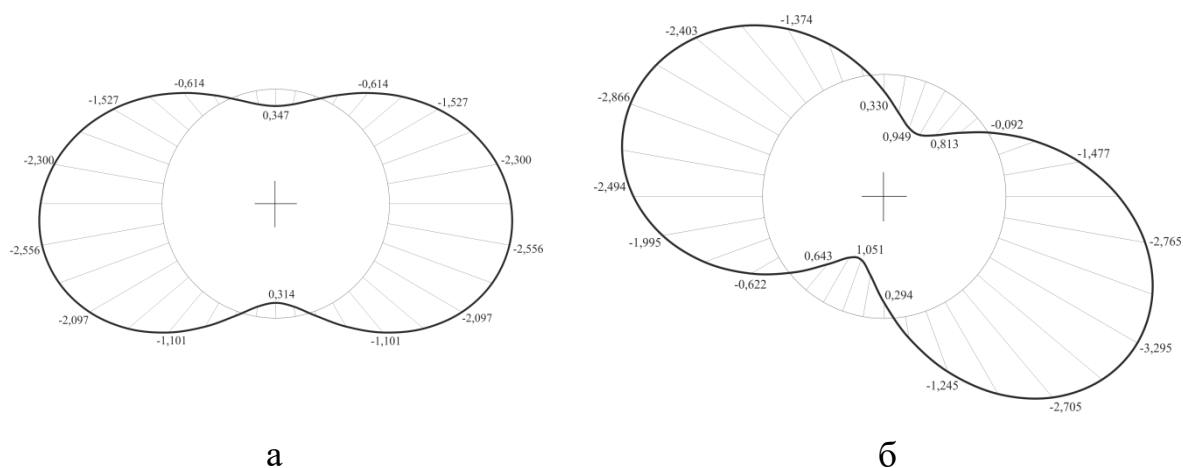


Рисунок 4.18 - Эпюры напряжений на внутреннем контуре обделки первого тоннеля до проходки второго: а - при горизонтальной земной поверхности; б - при наклонной земной поверхности ($\beta = 15^\circ$)

При горизонтальной земной поверхности в точках свода возникают максимальные растягивающие напряжения σ_θ , составляющие $0,347 \text{ МПа}$, а в лотке - растягивающие напряжения, равные $0,314 \text{ МПа}$. Максимальные сжимающие напряжения возникают в радиальных сечениях при $\theta = 190^\circ$ и, в силу симметрии, при $\theta = 350^\circ$ (рис. 4.18 а).

Учет влияния наклонной земной поверхности на напряженное состояние крепи приводит к существенному перераспределению напряжений: при $\beta = 15^\circ$ наблюдается увеличение максимальных растягивающих напряжений не менее чем в 3 раза, при этом они возникают в радиальных сечениях при $\theta = 250^\circ$, а максимальных сжимающих - не менее чем на 22%. Максимальные сжимающие напряжения возникают в радиальных сечениях при $\theta = 330^\circ$ (рис. 4.18 б).

На рис. 4.19 приведены эпюры напряжений σ_θ , МПа, возникающих в точках внутреннего контура бетонной крепи первой выработки после проходки второй при горизонтальной (рис. 4.19 а) и наклонной (рис. 4.19 б) земной поверхности.

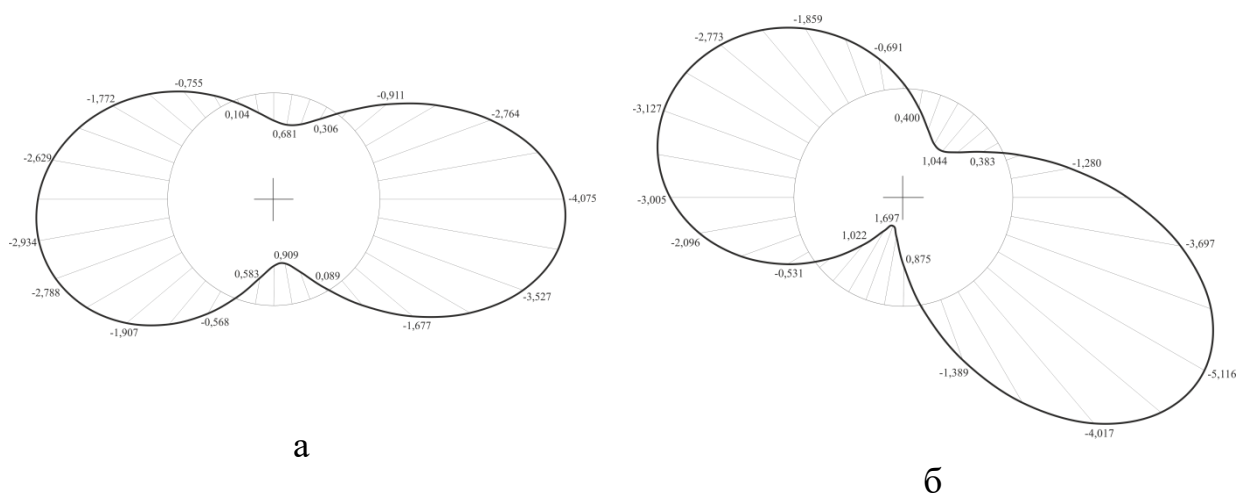


Рисунок 4.19 - Эпюры напряжений σ_θ на внутреннем контуре обделки первого тоннеля после проходки второго: а - при горизонтальной земной поверхности; б - при наклонной земной поверхности

Как следует из результатов проведенного численного эксперимента, проходка второй выработки приводит к существенному перераспределению напряжений в обделке первого тоннеля.

Так, в случае горизонтальной земной поверхности для растягивающих напряжений σ_θ наблюдается практически двукратное увеличение в точках свода и трехкратное - в лотке крепи. Возрастают значения и максимальных сжимающих напряжений с $-2,556$ МПа до $-4,075$ МПа в радиальных сечениях при углах θ в диапазоне от 350° до 360° (рис. 4.19 а). Эпюра напряжений σ_θ теряет вертикальную ось симметрии.

При наклонной земной поверхности установлено увеличение растягивающих напряжений от проходки соседней выработки: при $\theta = 60^\circ$ с $0,949$ МПа до $1,044$ МПа, при $\theta = 250^\circ$ - с $1,051$ МПа до $1,697$ МПа; максимальных сжимающих напряжений в радиальных сечениях при $\theta = 330^\circ$

- не менее чем на 64% (рис. 4.19 б). Представленные на рис. 4.19 эпюры соответствуют наихудшему напряженному состоянию обделки первого тоннеля, обусловленному как влиянием близко расположенной наклонной земной поверхности, так и наличием неподкрепленной второй выработки.

На рис. 4.20 приведены эпюры напряжений σ_θ , МПа, возникающих от действия собственного веса грунта в точках внутреннего контура сечения обделки второго тоннеля после возведения в нем обделки с отставанием $l = 0,9$ м при горизонтальной земной поверхности (рис. 4.20 а); при наклонной земной поверхности (рис. 4.20 б).

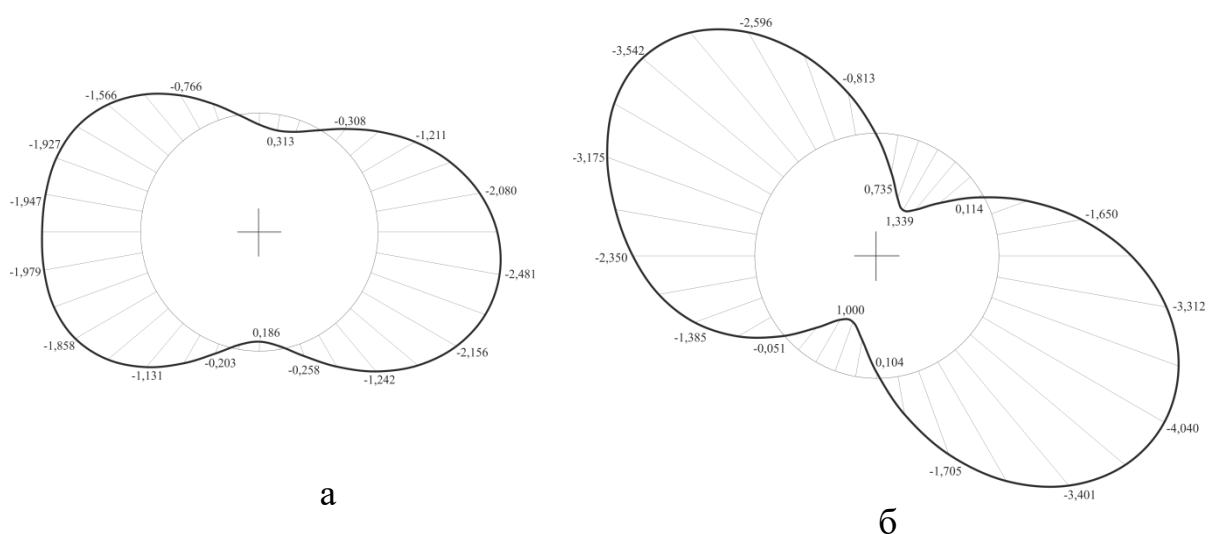


Рисунок 4.20 - Эпюры напряжений σ_θ , МПа на внутреннем контуре обделки второго тоннеля: а - при горизонтальной земной поверхности; б - при наклонной земной поверхности

Приведенные результаты расчета, учитывающего влияние очередности сооружения тоннелей и отставания возведения обделок от забоя, для случая горизонтальной земной поверхности показывают уменьшение расчетных напряжений в обделке второго тоннеля по сравнению с напряжениями в обделке первого тоннеля в соответствующих радиальных сечениях (рис. 4.19 а, рис. 4.20 а). Например, в обделке первого тоннеля растягивающие напряжения в своде достигают 0,681 МПа, в лотке - 0,909 МПа, а в обделке второго - 0,313 МПа в своде и 0,186 МПа в лотке;

при горизонтальной поверхности максимальные сжимающие напряжения уменьшаются соответственно с $-4,075 \text{ МПа}$ до $-2,481 \text{ МПа}$, а при наклонной - с $-5,116 \text{ МПа}$ до $-4,04 \text{ МПа}$.

Эпюра расчетных напряжений в обделке второго тоннеля, полученная с учетом влияния наклона земной поверхности, свидетельствует о значительном росте растягивающих напряжений до $1,339 \text{ МПа}$ в радиальных сечениях при $\theta = 60^0$ и до $1,0 \text{ МПа}$ при $\theta = 250^0$. Таким образом, максимальное значение растягивающих напряжений увеличивается не менее чем в 4,2 раза.

Следует отметить, что при наклонной земной поверхности ($\beta = 15^0$) продольная ось второго тоннеля находится на глубине не менее 12,4 м, что является причиной увеличения максимального значения сжимающих напряжений более чем на 61% с $-2,481 \text{ МПа}$ в сечении при $\theta = 350^0$ (рис. 4.20 а) до $-4,04 \text{ МПа}$ - при $\theta = 330^0$ (рис. 4.20 б).

На рис. 4.21 приведены эпюры напряжений σ_θ , МПа от совместного действия собственного веса грунта и нагрузки на наклонной поверхности, моделирующей вес наземного объекта для первого (рис. 4.21 а) и второго (рис. 4.21 б) тоннелей.

Приведенные результаты соответствуют случаю сооружения объекта на поверхности после проходки и крепления обеих тоннелей. Из представленных эпюр следует, что учет веса объекта на поверхности приводит к перераспределению напряжений в обделках.

Например, в обделке первого тоннеля растягивающие напряжения от действия собственного веса грунта составляли $1,697 \text{ МПа}$ в сечении $\theta = 250^0$ (рис. 4.19 б), при совместном действии нагрузок - $1,999 \text{ МПа}$ в сечении $\theta = 40^0$ (рис. 4.21 а); в крепи второй выработки - $1,339 \text{ МПа}$ в своде $\theta = 60^0$ (рис. 4.20 б) и $2,309 \text{ МПа}$ в сечении $\theta = 40^0$ (рис. 4.21 б) соответственно.

Увеличились (по модулю) максимальные сжимающие напряжения с $-5,116 \text{ МПа}$ в сечении $\theta = 330^0$ (рис. 4.19 б) до $-10,537 \text{ МПа}$ в сечении $\theta = 320^0$ (рис. 4.21 а) и с $-4,04 \text{ МПа}$ в сечении $\theta = 330^0$ (рис. 4.20 б) до $-9,671 \text{ МПа}$ в сечении $\theta = 310^0$ (рис. 4.21 б).

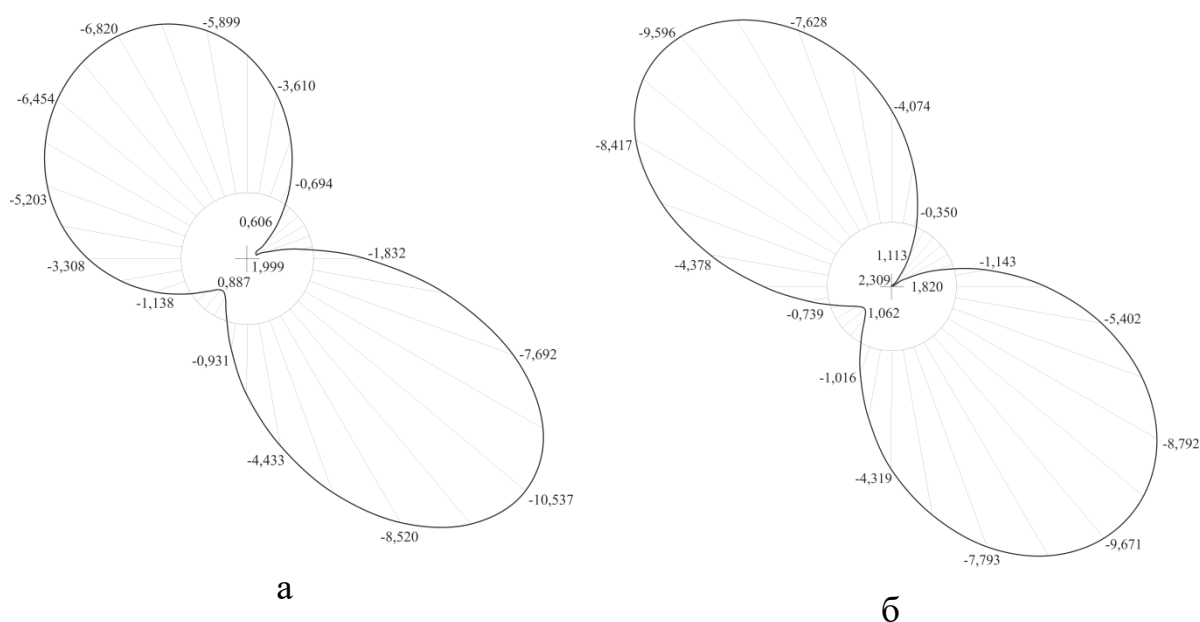


Рисунок 4.21 - Эпюры напряжений σ_θ от совместного действия собственного веса грунта и веса объекта на поверхности при $\beta = 15^0$ на внутренних контурах обделок тоннелей: а - первого; б - второго

Представленные результаты компьютерного моделирования иллюстрируют характер взаимодействия массива грунта с обделками параллельных тоннелей, сооруженных закрытым способом, в условиях влияния рельефа местности и наземных сооружений.

4.2 Сравнение результатов расчетов с данными, полученными другими авторами

Сравнение с данными расчетов монолитных обделок одиночных тоннелей, не испытывающих влияние соседних подземных сооружений и

сооруженных вблизи склонов [56, 58 - 61, 146], выполненное в процессе отладки программы, реализующей разработанный метод, показало полное совпадение. Расхождение результатов не превышает 1...2%, что можно объяснить особенностями программной реализации.

В научной литературе по теме выполненного исследования не обнаружено публикаций, за исключением [91], в которых приведены результаты определения напряженного состояния обделок двух или более параллельных тоннелей, сооруженных вблизи горного склона, с помощью численных или лабораторных методов. Это можно объяснить очевидными сложностями при построении соответствующей численной модели [92], а также при выполнении лабораторных испытаний [27].

Поэтому ниже приведены качественные и количественные сравнения результатов расчета обделок тоннелей с использованием разработанного метода с опубликованными данными, полученными другими авторами с помощью МКЭ [90, 26], при натурных измерениях [23, 68] и лабораторных испытаниях [27] с использованием эквивалентных материалов для тоннелей, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности и не испытывающих влияния других подземных объектов.

4.2.1 Напряженное состояние временной крепи железнодорожного тоннеля

В работе [90] приведены результаты определения напряженного состояния временной крепи железнодорожного тоннеля с учетом рельефа земной поверхности, полученные с использованием МКЭ. Расчетная схема приведена на рис. 1.1.

Расстояние по вертикали от земной поверхности до свода выработки составляет $H = 35$ м. В качестве временной крепи используются установленные с шагом 1 м по длине тоннеля полигональные арки из двутаврового

профиля, с затяжкой пространства между арками черновым бетоном толщиной 200 мм.

Породы представлены рифогенными закарстованными сильно трещиноватыми известняками крепостью $f = 2...2,5$ с удельным весом $26,19 \text{ кН/м}^3$, модулем деформации 1670 МПа , коэффициентом Пуассона $0,3$, углом внутреннего трения 15° и сцеплением $0,3 \text{ МПа}$; сталь арок временного крепления имеет удельный вес 78 кН/м^3 , модуль упругости $2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $0,25$; бетон затяжки между арками класса В25 обладает удельным весом 25 кН/м^3 , модулем деформации $3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, коэффициентом Пуассона $0,2$. Поле начальных напряжений в массиве пород задавалось с учетом коэффициента бокового давления, равного $0,5$.

Анализ изменения напряженного состояния временной крепи выполнялся на каждом из этапов - вначале оценивалось состояние двутавровых арок металлической крепи (двутавр №20), а затем - бетонной затяжки.

Установлено, что после разработки штроссы и отхода забоя нижнего уступа на достаточное расстояние в своде арки (точка 1) и в боках арки (точки 2 и 3) происходит стабилизация напряжений: в точке 1 - 17 МПа , в точках 2 и 3 - на уровне 30 МПа . В нижней части сечения тоннеля после закрепления штроссы напряжения стабилизируются: в точке 4 - 12 МПа , в точке 5 - 16 МПа .

Сжимающие напряжения в бетоне временной крепи в своде и боках обделки стабилизируются по мере удаления забоя от рассматриваемого поперечного сечения: наибольшие напряжения составляют для свода (точка 1) и боков (точки 2 и 3) соответственно $1,5 \text{ МПа}$, $2,8 \text{ МПа}$ и $3,9 \text{ МПа}$. Напряжения в точках 4 и 5 достигают соответственно $1,1 \text{ МПа}$ и $1,5 \text{ МПа}$.

Авторами делается вывод о том, что наличие наклонной земной поверхности проявляется в перераспределении напряжений и появлении асим-

метрии эпюр напряжений в арках временного крепления тоннеля, что, однако, не подтверждено приведенными на рис. 5 результатами в [90]. Установлено, что напряжения в штроссовой части сечения меньше в 2...2,5 раза напряжений в калоттной части.

При расчетах временной крепи с использованием разработанного метода расчета сделаны следующие допущения:

- типовое [105] некруговое поперечное сечение железнодорожного тоннеля заменено круговым с диаметром, равным вертикальному размеру выработки, следовательно, наружный радиус составляет $R_0 = 3,2 \text{ м}$;
- временная крепь, выполненная из стальных двутавров №20, заменена квазиоднородным слоем толщиной $\Delta = 0,20 \text{ м}$ ($R_1 = 3,0 \text{ м}$) с приведенным модулем деформации [33], равным $E_1 = 2769 \text{ МПа}$, $\nu_1 = 0,3$;
- временная крепь, выполненная из стальных двутавров №20, с бетонной затяжкой заменена квазиоднородным слоем толщиной $\Delta = 0,20 \text{ м}$ ($R_1 = 3,0 \text{ м}$) с приведенным модулем деформации [33], равным $E_1 = 32380 \text{ МПа}$, $\nu_1 = 0,2$;
- преобладающий угол наклона земной поверхности принят равным $\beta = 40^\circ$.

Сопоставление нормальных тангенциальных напряжений в характерных точках 1 – 5 (рис. 1.1 в) в элементах временной крепи тоннеля – арках из двутавров и бетонной затяжке из [90], и полученных с использованием разработанной программы, приведено в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Сопоставление напряжений σ_θ , МПа в характерных точках

Характерная точка	Арки временной крепи		Бетонная затяжка временной крепи	
	Численный метод	Аналитический метод	Численный метод	Аналитический метод
1	-17	-16	-1,5	-1,3
2	-30	-92	-2,8	-5,1
3	-30	-31	-3,9	-2,1
4	-12	-11	-1,1	-1,1
5	-16	-109	-1,5	-6,0

Из полученных результатов следует, что выявлено достаточно удовлетворительное согласование расчетных напряжений для точек 1, 3, 4 как для арочной крепи, так и для бетонной затяжки.

Наблюдаемые расхождения можно объяснить результатом замены некругового сечения выработки круговым, моделированием арочной крепи монолитной замкнутой конструкцией, отсутствием учета влияния поэтапной разработки сечения тоннеля на напряженное состояние крепи.

Аналитический метод показывает более существенную асимметрию эпюр расчетных напряжений, вызванную влиянием наклонной земной поверхности.

4.2.2 Напряженное состояние однородного изотропного откоса, ослабленного горизонтальной круглой выработкой

В работе [26] приведены результаты численного исследования напряженного состояния массива грунта в окрестности выработки круглого поперечного сечения, ослабляющей однородный откос на уровне его подошвы, выполненного с помощью компьютерной программы FEA, реализующей МКЭ [159]. Расчетная схема приведена на рис. 1.7.

Приведены графики изменения максимальных сжимающих и растягивающих напряжений в точках контура выработки от расстояния между продольной осью выработки и подошвой откоса при различных значениях коэффициента бокового давления в массиве грунта.

Расчеты, выполненные с использованием разработанной программы, показали качественное совпадение результатов для максимальных сжимающих напряжений. Но, при этом, расчетные максимальные растягивающие напряжения превышают соответствующие напряжения, полученные с помощью МКЭ, не менее чем в 6...8 раз. Это можно объяснить влиянием размеров конечно-элементной области и способа разбиения на

величины растягивающих напряжений, которые по абсолютной величине значительно меньше максимальных сжимающих.

Подтвержден также вывод авторов [26] о том, что величина коэффициента бокового давления вмещающего скального грунта существенным образом влияет на величину напряжений, приводя к появлению растягивающих напряжений, причем чем ближе выработка расположена к подошве откоса, тем больше его влияние.

4.2.3 Напряженное состояние временной крепи транспортного тоннеля

В работах [23, 68] приведены результаты натурных исследований формирования напряженного состояния временной крепи из набрызгбетона, использованной при строительстве железнодорожного тоннеля вблизи склона на Северо-Кавказской железной дороге. Поперечное сечение опытного участка и конечно-элементная модель показаны на рис. 1.10 а, б соответственно. размещение датчиков в крепи тоннеля – на рис. 1.11 а.

Тоннель сооружен на глубине 40 м (35 м до продольной оси тоннеля) в осадочных горных породах обломочного происхождения - переслаивающиеся алевролиты, мергель, песчаники и аргиллиты.

При расчетах некруговое сечение тоннеля заменялось круговым с радиусом $R_0 = 4,975$ м, толщина набрызгбетонной обделки $\Delta = 0,2$ м, следовательно $R_1 = 4,775$ м. Размещение датчиков в крепи тоннеля приведено на рис. 1.11 а, что соответствует радиальным сечениям со стороны склона $\theta = 120^\circ$ в каллотной части (точка 1) и $\theta = 210^\circ$ (точка 2) в штроссовой; с нагорной стороны – $\theta = 60^\circ$ (точка 3) в каллоте и $\theta = 330^\circ$ в штроссе (точка 4). Модуль деформации и коэффициент Пуассона слоя обделки - набрызгбетона в сочетании с арматурным каркасом - приняты равным $E_1 = 36000$ МПа и $\nu_1 = 0,2$ соответственно. Деформационные характеристики массива пород, коэффициент бокового давления и удельный вес - $E_0 = 70$ МПа, $\nu_0 = 0,3$,

$\lambda = 0,4$, $\gamma = 0,026 \text{ МН} / \text{м}^3$. Угол наклона земной поверхности $\beta = 35^0$.

В результате натурных измерений установлено, что напряжения в бетоне в каллотной части до раскрытия штроссы (в течение месяца после начала проходки каллоты) стабилизируются - величины сжимающих напряжений в бетоне крепи со стороны склона составляют $\sim 4,5 \text{ МПа}$ в точке 1 и с нагорной стороны - растягивающие напряжения - $\sim 4 \text{ МПа}$ в точке 3 [68].

Расчетные значения напряжений, полученные с использованием разработанного метода при принятых исходных данных, в рассматриваемых точках составили соответственно $-4,63 \text{ МПа}$ (сжатие) и $4,01 \text{ МПа}$ (растяжение). Эти результаты получены при $\alpha^* = 0,155$, который соответствует отставанию возведения крепи $l = 5 \text{ м}$ от забоя.

Таким образом, расхождения составляют не более 3%. Авторами отмечается, что сравнение результатов натурных измерений с данными расчетов, выполненных с помощью МКЭ для указанных горно-геологических и технических условий, учитывающих физико-механические свойства массива пород, материалов крепи, технологические этапы раскрытия сечения тоннеля и возведения крепи, показали также весьма удовлетворительное согласование. Установлено, что расчетные усилия в крепи меньше значений натурных измерений на 6...10% для всех этапов строительства.

4.2.4 Сравнение с данными экспериментов по определению устойчивости однородного откоса, подработанного горизонтальной выработкой

В работе [27] опубликован анализ результатов численных и модельных экспериментов по исследованию устойчивости однородного изотропного откоса, подработанного горизонтальной выработкой кругового поперечного сечения. Лабораторные эксперименты выполнялись на моделях однородных откосов из эквивалентного материала.

Расчеты по разработанному методу для незакрепленной выработки,

расположенной вблизи откоса, проводились при следующих исходных данных: $H = 2,6 \text{ м}$, $\beta = 60^0$, $R = 1 \text{ м}$, $\nu_1 = 0,4$, $\lambda = 0,3$, $\gamma = 0,0172 \text{ МН/м}^3$.

Установлено, что максимальные растягивающие напряжения на контуре выработки возникают при $\theta = 240^0$ и $\theta = 60^0$, т.е. в точках концов диаметра, параллельного склону, что подтверждается изображениями областей пластических деформаций, приведенными в работе [27].

В точках концов диаметра сечения отверстия, перпендикулярного склону, т.е. при $\theta = 140^0 \dots 150^0$ и $\theta = 320^0 \dots 330^0$, возникают максимальные сжимающие напряжения, которые при определенном сочетании этих напряжений и пределов прочности среды (массива пород) приводит к потере устойчивости склона, а также к вывалообразованию [27].

Выводы

1. Результаты расчета обделок тоннелей, сооруженных вблизи склона, свидетельствуют о существенном влиянии на напряженно-деформированное состояние массива грунта и подземных конструкций угла наклона земной поверхности, взаимного расположения параллельных тоннелей, их поперечных размеров, соотношений деформационных характеристик материалов и др.

2. Построенные на основе использования условия прочности Кулона-Мора зоны неупругих деформаций в массиве грунта позволяют оценить устойчивость склонов, ослабленных выработками, продольные оси которых параллельны земной поверхности.

3. Установлено уменьшение по абсолютной величине напряжений в вертикальном целике между выработками с увеличением угла наклона земной поверхности.

4. Наличие наклонной земной поверхности приводит к возможному появлению в поперечных сечениях обделок растягивающих и увеличению

максимальных значений сжимающих нормальных тангенциальных напряжений.

5. Учет влияния очередности проходки выработок вблизи склона и отставания возведения обделок от забоя оказывает существенное влияние на значения максимальных растягивающих и сжимающих напряжений в подземных конструкциях.

6. Расхождение результатов расчета по предлагаемому методу и разработанным ранее аналитическим методам для обделок одиночных тоннелей составляет не более 1...2%.

7. Выполненные сравнения результатов расчета обделок тоннелей с использованием разработанного метода с опубликованными данными, полученными другими авторами с помощью МКЭ, при натурных измерениях и лабораторных испытаниях с использованием эквивалентных материалов, для тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности и не испытывающих влияния других подземных объектов, показали в ряде случаев качественное и количественное согласование.

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛОК ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТОННЕЛЕЙ ОТ ОСНОВНЫХ ВЛИЯЮЩИХ ФАКТОРОВ

Ниже приведены результаты исследования зависимости напряженного состояния обделок из железобетонных блоков двух параллельных тоннелей кругового поперечного сечения от соотношения деформационных характеристик грунта, размеров поперечного сечения тоннелей, материала обделок, их толщины при различных углах наклона земной поверхности и величинах коэффициента бокового давления в массиве грунта.

Расчетная схема представлена на рис. 5.1.

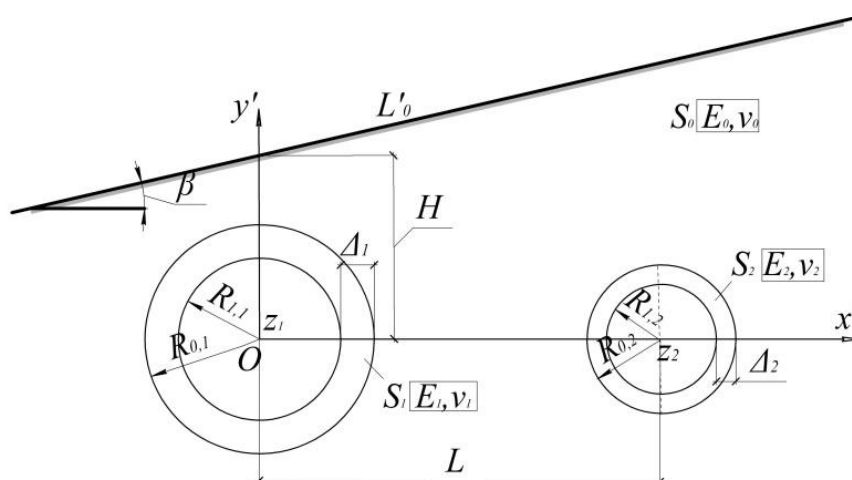


Рис. 5.1. Расчетная схема

Тоннели сооружены щитовым способом в грунтах, модуль деформации которых изменяется в диапазоне $E_0 = 20 \dots 1000 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона принят равным $\nu_0 = 0,35$, объемный вес - $\gamma = 0,0215 \text{ МН} / \text{м}^3$. Коэффициент бокового давления - $\lambda = 0,5$. Угол наклона β земной поверхности изменялся в диапазоне от 0^0 до 30^0 . Конкретное значение угла β , использованное при расчетах, указывается при анализе полученных результатов.

Наружный радиус левого тоннеля принят равным $R_{0,1} = 5,2 \text{ м}$, внутренний радиус - $R_{0,2} = 4,8 \text{ м}$ (толщина блоков $\Delta_1 = 0,40 \text{ м}$); наружный радиус правого тоннеля - $R_{0,2} = 3,0 \text{ м}$, внутренний радиус - $R_{1,2} = 2,8 \text{ м}$ (толщина блоков $\Delta_2 = 0,20 \text{ м}$). Модуль деформации бетона обделок $E_1 = E_2 = 36000 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона - $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$. Расчетная схема соответствует одновременной проходке выработок (худший случай) и креплению непосредственно в забое.

Глубина заложения первого (левого) тоннеля по вертикали от земной поверхности составляет $H = 10,0 \text{ м}$. Центры поперечных сечений выработок расположены на горизонтальной прямой на расстоянии $l = 9,0 \text{ м}$.

Выполненные расчеты показывают, что максимальные нормальные тангенциальные напряжения σ_θ возникают, как правило, в точках внутренних контуров поперечных сечений обделок.

Ниже приведены зависимости максимальных растягивающих и сжимающих напряжений σ_θ в точках внутренних контуров сечения обделок тоннелей с равными диаметрами от основных влияющих факторов.

Для исследования влияния величины модуля деформации E_0 массива грунта на напряженное состояние крепи производились расчеты при различных значениях коэффициента бокового давления λ в массиве грунта и различных углах β наклона земной поверхности.

Зависимости максимальных растягивающих (положительных) и сжимающих (отрицательных) напряжений σ_θ , МПа в точках внутренних контуров крепи левой и правой выработок от величины E_0 показаны на рис. 5.2 – 5.4 соответственно при $\lambda = 0,25$; $\lambda = 0,5$; $\lambda = 1,0$. Толщина обделок принята равной $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,20 \text{ м}$.

Следует отметить, что наблюдаемое превышение напряжений в обделке второго (правого) тоннеля по сравнению с соответствующими напряже-

ниями в обделке первого (левого) тоннеля объясняется бóльшей глубиной заложения второго тоннеля.

Установлено, что с ростом модуля деформации грунта растягивающие напряжения убывают: для горизонтальной поверхности в обделке первого (в силу симметрии – и второго) тоннеля они полностью исчезают при $E_0 = 400 \text{ МПа}$ (линии 1); для $\beta = 15^\circ$ в обделке первого - при $E_0 = 450 \text{ МПа}$ и второго - при $E_0 = 500 \text{ МПа}$ (линии 2); для $\beta = 30^\circ$ растягивающие напряжения в обделке первого тоннеля полностью исчезают при E_0 , незначительно превышающем 500 МПа , а в обделке второго тоннеля (более глубокого заложения) в исследуемом диапазоне изменения E_0 от 20 МПа до 500 МПа не исчезают вовсе (линии 3).

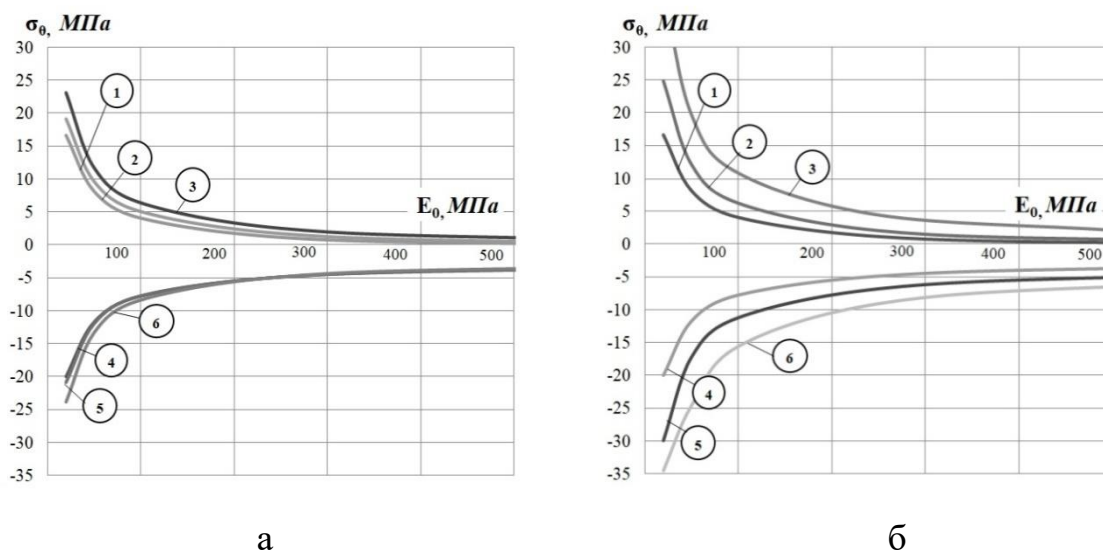


Рис. 5.2. Зависимости максимальных напряжений $\sigma_\theta, \text{МПа}$ на внутренних контурах обделок левого (а), правого (б) тоннелей от E_0 при $\lambda = 0,25$:

линии 1 и 4 - $\beta = 0^\circ$; линии 2 и 5 - $\beta = 15^\circ$; линии 3 и 6 - $\beta = 30^\circ$

С увеличением модуля деформации грунта сжимающие напряжения также монотонно убывают по абсолютной величине: в обделке первого тоннеля для всех углов наклона поверхности различия между максимальными напряжениями не превышают 5% (линии 4, 5, 6 на рис. 5.2 а); в крепи второй выработки увеличение угла наклона приводит к существенному росту мак-

симальных сжимающих напряжений (линии 4, 5, 6 на рис. 5.2 б). Например, в слабых грунтах при $E_0 = 20 \text{ МПа}$ увеличение угла наклона земной поверхности от $\beta = 0^0$ до $\beta = 30^0$ вызывает рост напряжений не менее чем в 1,75 раз (линии 4 и 6 на рис. 5.2 б).

Закономерности изменения максимальных напряжений в обделках, полученные для $\lambda = 0,5$ и приведенные на рис. 5.3, свидетельствуют о том, что при наклонной земной поверхности в обделках обоих тоннелей возникают растягивающие напряжения (линии 2, 3), которые с увеличением модуля деформации E_0 в исследуемом диапазоне изменения значительно уменьшаются. Для сравнения на рис. 5.3 а, б приведены линии 1, иллюстрирующие уменьшение растягивающих напряжений до их полного исчезновения при $E_0 = 250 \text{ МПа}$ для горизонтальной поверхности ($\beta = 0^0$).

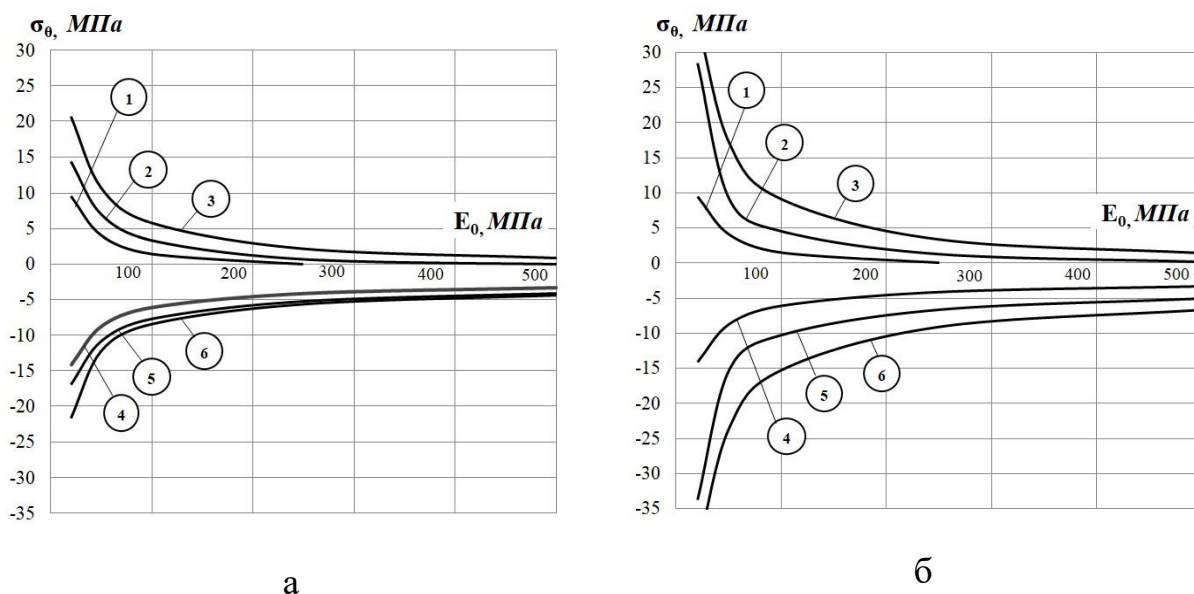


Рис. 5.3. Зависимости максимальных напряжений $\sigma_\theta, \text{МПа}$ на внутренних контурах обделок левого (а), правого (б) тоннелей от E_0 при $\lambda = 0,5$:
линии 1 и 4 - $\beta = 0^0$; линии 2 и 5 - $\beta = 15^0$; линии 3 и 6 - $\beta = 30^0$

С увеличением модуля деформации грунта E_0 сжимающие напряжения убывают по абсолютной величине в обделках обоих тоннелей. Более ин-

тенсивное уменьшение сжимающих напряжений наблюдается в обделке второго тоннеля.

Зависимости, приведенные на рис. 5.4, соответствуют равнокомпонентному, так называемому гидростатическому, полю начальных напряжений при $\lambda = 1$.

Расчеты показывают, что в отличие от результатов, приведенных на рис. 5.2, 5.3 для неравнокомпонентного поля начальных напряжений, при $\lambda = 1$ в обделках обоих тоннелей, сооруженных вблизи горизонтальной поверхности, растягивающие напряжения отсутствуют (линии 1 на рис. 5.4 а, б приведены для сохранения единообразия).

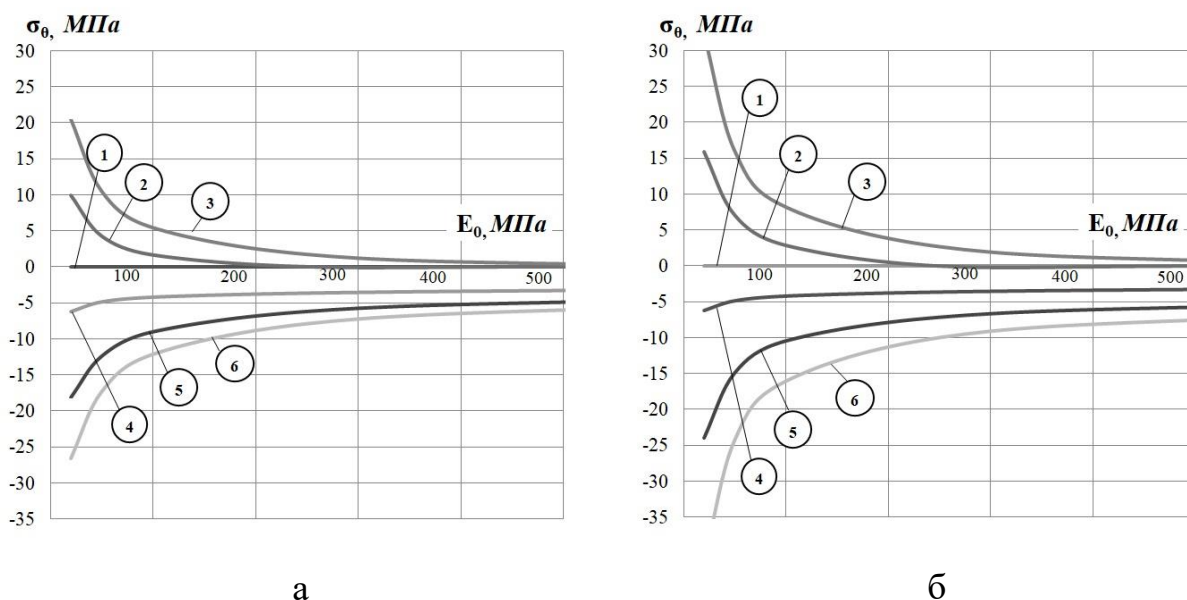


Рис. 5.4. Зависимости максимальных напряжений $\sigma_\theta, \text{МПа}$ на внутренних контурах обделок левого (а), правого (б) тоннелей от E_0 при $\lambda = 1$:

линии 1 и 4 - $\beta = 0^\circ$; линии 2 и 5 - $\beta = 15^\circ$; линии 3 и 6 - $\beta = 30^\circ$

Из рис. 5.4 а, б следует, что с ростом E_0 растягивающие напряжения убывают до полного исчезновения в обделках обоих тоннелей: для $\beta = 15^\circ$ при $E_0 = 250 \text{ МПа}$ (линии 2); для $\beta = 30^\circ$ - при E_0 , превышающем 500 МПа (линии 3).

С увеличением модуля деформации грунта E_0 сжимающие напряжения убывают по абсолютной величине (линии 4, 5, 6 на рис. 5.4 а, б).

Для исследования влияния величины модуля деформации массива грунта E_0 на напряженное состояние обделок двух различных по поперечным размерам тоннелей, сооруженных вблизи земной поверхности, имеющей угол наклона к горизонту $\beta = 30^\circ$, производились расчеты при глубине заложения первого тоннеля $H = 10$ м, $H = 20$ м и различных толщинах обделки $\Delta_1 = 0,6$ м, $\Delta_1 = 0,5$ м, $\Delta_1 = 0,4$ м. Толщина обделки второго тоннеля - $\Delta_2 = 0,2$ м, коэффициент бокового давления грунта и расстояние между продольными осями тоннелей приняты соответственно равными $\lambda = 0,5$, $L = 9,0$ м. Наружные радиусы тоннелей приняты равными $R_{0,1} = 5,2$ м для первого, $R_{0,2} = 3,0$ м - для второго.

Зависимости максимальных растягивающих и сжимающих напряжений в точках внутренних контуров обделок левого и правого тоннелей от величины E_0 показаны на рис. 5.5 при $H = 10$ м и на рис. 5.6 при $H = 20$ м.

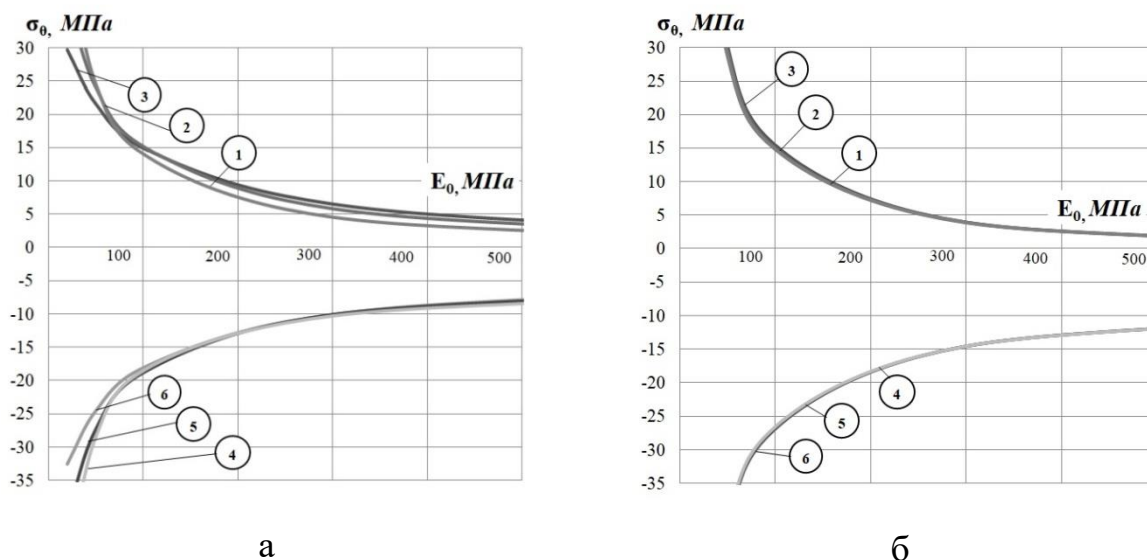
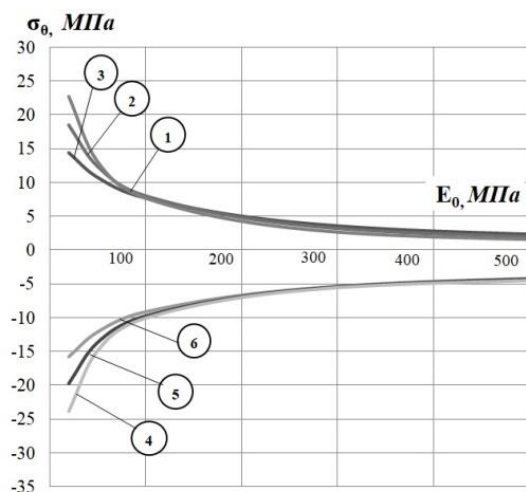
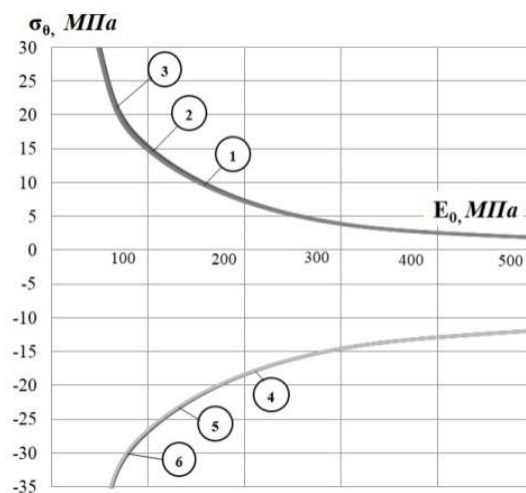


Рис. 5.5. Зависимости максимальных напряжений σ_θ , МПа на внутренних контурах обделок левого (а), правого (б) тоннелей от E_0 при $H = 10$ м: линии 1 и 4 - $\Delta_1 = 0,6$ м; линии 2 и 5 - $\Delta_1 = 0,5$ м; линии 3 и 6 - $\Delta_1 = 0,4$ м



а



б

Рис. 5.6. Зависимости максимальных напряжений σ_θ , МПа на внутренних контурах обделок левого (а), правого (б) тоннелей от E_0 при $H = 20$ м: линии 1 и 4 - $\Delta_1 = 0,6$ м; линии 2 и 5 - $\Delta_1 = 0,5$ м; линии 3 и 6 - $\Delta_1 = 0,4$ м

Зависимости, приведенные на рис. 5.5 а, б и рис. 5.6 а, б, свидетельствуют о том, что в обделках тоннелей возникают как растягивающие, так и сжимающие напряжения, монотонно убывающие с ростом модуля деформации массива грунта E_0 . Увеличение толщины Δ_1 обделки первого тоннеля приводит к увеличению возникающих максимальных напряжений, особенно это проявляется в слабых грунтах с модулем деформации до $E_0 = 100$ МПа. Из приведенных результатов для обделки первого тоннеля следует, что начиная с $E_0 = 60$ МПа, значения максимальных растягивающих напряжений практически не зависят от толщины обделки – линии 1, 2 и 3 на рис 5.5 а, 5.6, расхождение не превышает 2...3%. Установлено, что влияние толщины обделки Δ_1 первого тоннеля на значения максимальных напряжений в обделке второго тоннеля крайне незначительно.

Для исследования влияния величины расстояния l на напряженное состояние обделок двух различных по диаметру тоннелей производились расчеты при глубине заложения первого тоннеля $H = 10$ м, угле наклона земной поверхности $\beta = 30^\circ$, коэффициенте бокового давления грунта $\lambda = 0,5$

для трех значений модуля деформации массива грунта - $E_0 = 50 \text{ МПа}$; $E_0 = 500 \text{ МПа}$; $E_0 = 1000 \text{ МПа}$.

Полученные зависимости максимальных растягивающих и сжимающих напряжений $\sigma_\theta, \text{МПа}$ в точках внутренних контуров обделок левого и правого тоннелей от величины l показаны на рис. 5.7.

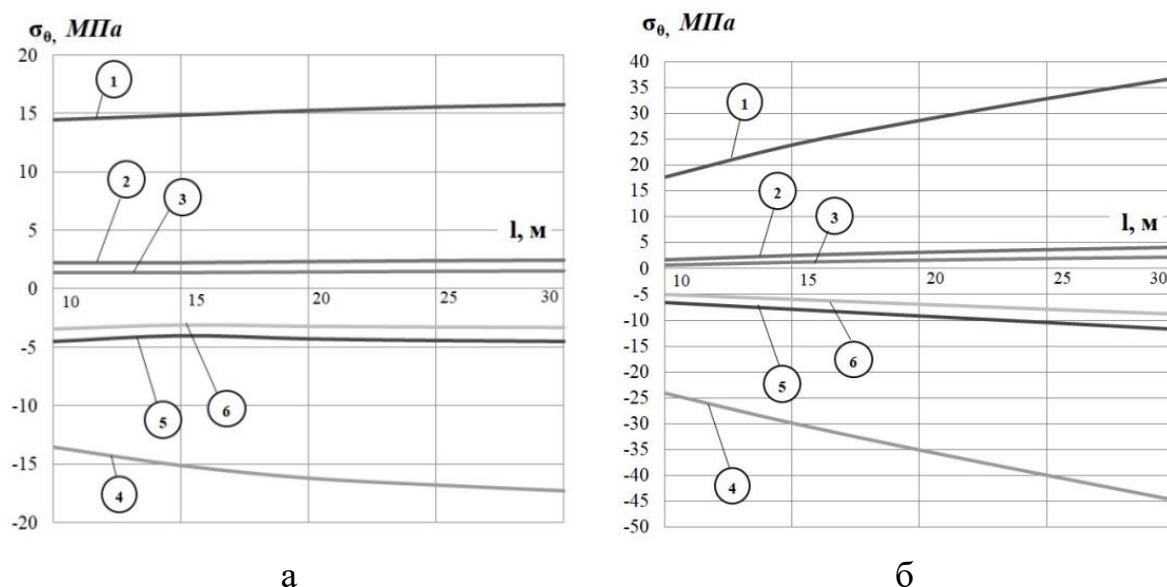


Рис. 5.7. Зависимости максимальных напряжений $\sigma_\theta, \text{МПа}$ на внутренних контурах обделок левого (а), правого (б) тоннелей от l при $H = 10 \text{ м}$:
линии 1 и 4 - $E_0 = 50 \text{ МПа}$; линии 2 и 5 - $E_0 = 500 \text{ МПа}$;
линии 3 и 6 - $E_0 = 1000 \text{ МПа}$

В обделке первого тоннеля максимальные значения напряжений остаются практически неизменными – выявлено незначительное увеличение растягивающих напряжений (линии 1 на рис. 5.7), а в обделке второго наблюдается рост и максимальных растягивающих и максимальных сжимающих напряжений из-за фактического увеличения глубины расположения второго тоннеля. При этом обнаружено минимальное значение сжимающих напряжений при расстоянии $l = 15 \text{ м}$. Более интенсивный рост сжимающих напряжений выявлен в слабых грунтах, отмечается асимптотическое стремление к значениям напряжений в одиночных тоннелях, расположенных на тех же глубинах и угле наклона земной поверхности.

Выводы

1. На основе компьютерного моделирования с использованием разработанных программ выполнено исследование зависимости напряженного состояния обделок из железобетонных блоков двух параллельных тоннелей кругового поперечного сечения от соотношения деформационных характеристик грунта, размеров поперечного сечения тоннелей, материала обделок, их толщины при различных углах наклона земной поверхности и величинах коэффициента бокового давления в массиве грунта.

2. Выполненное исследование показало, что максимальные сжимающие и растягивающие нормальные тангенциальные напряжения возникают, как правило, в точках внутренних контуров поперечных сечений обделок.

3. Увеличение модуля деформации массива грунта при различных значениях коэффициента бокового давления приводит к существенному уменьшению значений максимальных сжимающих и растягивающих нормальных тангенциальных напряжений. Наиболее интенсивно это проявляется в обделке более заглубленного тоннеля.

4. При равнокомпонентном поле начальных напряжений возможно отсутствие в обделке тоннелей растягивающих напряжений.

5. Увеличение толщины обделок тоннелей в слабых грунтах приводит к увеличению возникающих максимальных напряжений.

6. С увеличением расстояния между продольными осями тоннелей наблюдается незначительное увеличение напряжений в обделке первого и существенное увеличение напряжений в обделке второго (более глубокого) тоннеля, особенно это характерно для слабых грунтов.

7. Выполненные исследования позволили уточнить и установить новые закономерности формирования напряженного состояния обделок тоннелей, которые могут быть использованы при практическом проектировании.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной научно-квалификационной работе выполнено решение актуальной научной задачи, заключающейся в разработке на основе теоретических положений механики сплошной среды, геомеханики и механики подземных сооружений нового аналитического метода расчета обделок параллельных тоннелей, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности.

Метод расчета позволяет при проектировании комплексов подземных сооружений различного назначения установить новые и уточнить известные закономерности формирования напряженного состояния массива грунта (пород) и обделок, что будет способствовать принятию обоснованных конструктивных и технологических решений, способствующих повышению прочности и надежности применяемых конструкций.

Научные и практические результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработана математическая модель взаимодействия обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, с массивом грунта, базирующаяся на теоретических положениях геомеханики и механики подземных сооружений.

2. Выполнены постановки и с применением математического аппарата теории функций комплексного переменного получены решения двух плоских задач теории упругости для весомой линейно-деформируемой полубесконечной среды, ослабленной вблизи наклонной границы произвольным числом подкрепленных круговых отверстий, при соответствующих граничных условиях.

3. Достоверность полученных строгих аналитических решений подтверждается высокой точностью удовлетворения граничных условий задач теории упругости, погрешность расчетов не превышает 3 %.

4. Разработан аналитический метод расчета обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения, сооруженных закрытым способом вблизи наклонной земной поверхности, при действии собственного веса пород и веса объектов на поверхности, позволяющий производить количественное прогнозирование (оценку) напряженного состояния массива грунта и обделок тоннелей.

5. Составлены алгоритм и компьютерные программы, реализующие разработанный метод расчета и позволяющие эффективно производить многовариантные расчеты обделок параллельных тоннелей.

6. Выполнены сравнения и установлено удовлетворительное согласование результатов расчетов по разработанному методу с данными, полученными другими авторами численным методом конечных элементов, при натурных исследованиях строящихся тоннелей и лабораторных испытаниях с применением моделей из эквивалентных материалов.

7. Уточнены известные и установлены новые закономерности формирования напряженного состояния обделок тоннелей, сооруженных вблизи склона, при действии собственного веса грунта и веса объектов на поверхности при различных сочетаниях основных влияющих факторов.

Применение разработанного метода, реализованного в виде компьютерных программ, при проектировании, строительстве и эксплуатации будет способствовать принятию научно обоснованных технических решений, повышающих прочность и надежность подземных сооружений, располагающихся в районах со сложным рельефом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдылдаев Э.К., Салимова Г.Е. Напряженно-деформированное состояние прибортового массива в условиях подработки камерами// Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. Серия «Науки о земле». - 2008. - Т. 8. - № 3. - С. 157 - 159.
2. Аманалиев А.А. , Жумабаев Б. Напряженное состояние пород вокруг выработок, расположенных в горной местности в слоистом массиве// Наука и новые технологии. ГКННТ. - 1996. - №2. - С. 45 - 49.
3. Аманалиев А.А. Численное моделирование напряженного состояния массива пород вокруг подземных выработок// Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск 11. - Институт геомеханики и освоения недр НАН Кыргызской Республики. - Бишкек. - 2010. - С. 45 -52.
4. Амусин Б.З., Линьков А.М. Об использовании метода переменных модулей для решения одного класса задач линейной наследственной ползучести// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1974. - №6. - С. 162 - 166.
5. Амусин Б.З., Фадеев А.Б. Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики. - М.: Недра. - 1975. - 144 с.
6. Анциферов С.В. Метод расчета многослойных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения мелкого заложения: монография/ Тула: изд-во ТулГУ. - 2014. - 298 с.
7. Анциферов С.В., Андреюк Л.С., Фомин А.В. Математическая модель формирования напряженного состояния грунта вокруг двух выработок, расположенных вблизи склона// Новая наука: От идеи к результату. Международное научное периодическое издание по итогам Международной научно-практической конференции. - Стерлитамак: АМИ. - 2016. - № 5-2 (84). - С. 135 - 138.

8. Анциферов С.В., Копылов А.Б., Залесский К.Е., Фомин А.В. Определение зон неупругих деформаций грунта вокруг выработок неглубокого заложения// Транспортное строительство. - 2016. - № 12. - С. 19 - 21.

9. Анциферов С.В., Саммаль А.С., Фомин А.В. Метод определения напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона// Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений: Труды VI Международной конференции. - Екатеринбург: изд-во УГГУ. - 2019. - С. 48 - 57.

10. Анциферов С.В., Саммаль А.С., Фомин А.В. О напряженном состоянии монолитной крепи горных выработок, сооруженных вблизи склона// Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. - 2019. - Т. 6. - № 1. - С. 46 - 51.

11. Анциферов С.В., Фомин А.В. Математическое моделирование взаимодействия обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона, с массивом грунта// Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. - 2017. - № 4. - Тула: изд-во ТулГУ. - С. 255 - 262.

12. Анциферов С.В., Фомин А.В. Напряженное состояние целика между двумя выработками неглубокого заложения// Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: сборник тезисов докладов X Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте. - СПб.: ФГБОУ ВО ПГУПС. - 2017. - С. 10 - 11.

13. Анциферов С.В., Фомин А.В. Напряженное состояние обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона// Новое в архитектуре, проектировании строительных конструкций и реконструкции. Материалы IV Международной (X Всероссийской) конференции. Чебоксары: изд-во Чувашского государственного университета имени И.Н. Ульянова - 2018. - С. 377 - 383.

14. Анциферов С.В., Фомин А.В. Метод расчета крепи параллельных выработок, сооружаемых вблизи склона// Экономика и инжиниринг: от теории к практике. Сборник материалов XVI Международной науч-

но-практической конференции 28 мая 2020 г. - Минск: изд-во БНТУ. - 2020. - С. 201 - 202.

15. Анциферов С.В., Фомин А.В. Напряженное состояние крепи параллельных выработок, сооруженных вблизи склона, от массы расположенных на поверхности объектов// Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. - 2020. - № 1. - Тула: изд-во ТулГУ. - С. 375 - 391.

16. Анциферов С.В., Фомин А.В., Бурзяев В.С. Напряженное состояние целика между двумя выработками неглубокого заложения// Актуальные вопросы современных научных исследований. Материалы Международной (заочной) научно-практической конференции. - Нефтекамск: Научно-издательский центр "Мир науки". - 2017. - С. 524 - 531.

17. Анциферов С.В., Фомин А.В., Бурзяев В.С. Моделирование напряженного состояния массива пород вокруг выработок неглубокого заложения// Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник трудов X Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте. - СПб.: ФГБОУ ВО ПГУПС. - 2018. - С. 19 - 25.

18. Араманович И.Г. О распределении напряжений в упругой плоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием// Докл. АН СССР. - М. - 1955. Т. 104. - №3. - С. 372 - 375.

19. Ахпателов Д.М. Исследование влияния рельефа поверхности, примыкающей к горному массиву, на его напряженное состояние// В кн.: Современные методы изучения физико-механических свойств пород. - М: изд-во МИСИ. - 1974. - С. 86 - 94.

20. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика подземных сооружений и конструкций крепей. - М. - Недра. - 1992. - 200 с.

21. Баклашов И.В., Тимофеев О.В. Конструкции и расчет крепей и обделок. - М. - Недра. - 1979. - 263 с.

22. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат. - 1982. - 442 с.
23. Безродный К.П., Лебедев М.О. Формирование напряженного состояния временной крепи при строительстве транспортного тоннеля СКЖД вблизи склона// Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). - М.: ООО "Горная книга". - 2012. - № 6. - С. 237 - 244.
24. Беляков Н.А. Геомеханическое обоснование параметров крепления железнодорожных тоннелей в условиях Северного Кавказа// Записки горного института. - Санкт-Петербург. - 2010. - Т.186. - С. 99 - 103.
25. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А., Ермаков О.В. Влияние горизонтальной подземной выработки, ориентированной параллельно фронту однородного откоса, на его устойчивость// Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. - 2018. - № 1. - С. 82 - 92.
26. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А. Распределение напряжений в однородном изотропном откосе, ослабленном горизонтальной круглой выработкой, расположенной на уровне его подошвы// Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. - 2017. - Т. 8. - № 2. - С. 15 - 26.
27. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А., Ермаков О.В. Численные и модельные эксперименты по определению устойчивости однородного откоса, подработанного горизонтальной выработкой// Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. - 2018. - № 1. - С. 30 - 41.
28. Богомолов Г.М., Голицынский Д.М., Меркин В.Е. Справочник инженера - тоннельщика. - М.: Транспорт. - 1993. - 389 с.
29. Бодров Б.П., Матэри Б.Ф. Кольцо в упругой среде/ Метропроект. Отдел типового проектирования. - 1936. - Бюл. № 24. - 40 с.
30. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных уравнений. - М.: Мир. - 1987. - 524 с.

31. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. - М.: Наука. - 1986. - 544 с.
32. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. - М.: Недра. - 1982. - 270 с.
33. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах/ Учеб. пособ. для вузов. - М.: Недра. - 1989. - 270 с.
34. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений/ Учеб. для вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Недра. - 1994. - 382 с.
35. Булычев Н.С., Фотиева Н.Н., Стрельцов Е.В. Проектирование и расчет крепи капитальных выработок. - М.: Недра. - 1986. - 288 с.
36. Васильев С.Г. Подземное строительство неглубокого заложения. - Львов: Вища школа. - 1980. - 144 с.
37. Виноградов Б.Н. Опыт измерения давления горных пород на тоннельные обделки мессдозами// Сб. ЦНИИС. - М. - 1959. - №31. - С. 1 - 47.
38. Галлагер Л. Метод конечных элементов. Основы. - М.: Мир. - 1984. - 419 с.
39. Гарбер В.А. Научные основы проектирования тоннельных конструкций с учетом технологии их сооружения//НИИЦ «Тоннели и метрополитены» АО ЦНИИС. В 2-х кн. - М. - 1996.
40. Глушихин Ф.П., Кузнецов Г.Н. и др. Моделирование в геомеханике. - М. - Недра. - 1991. - 240 с.
41. Голицынский Д.М., Фролов Ю.С. и др. Строительство тоннелей и метрополитенов. - М. - Транспорт. - 1989. - 319 с.
42. Голицынский Д.М., Фролов Ю.С., Кавказский В.Н., Укшебаев М.Т., Кульбаев М.Н. Исследование методом моделирования напряженно-деформированного состояния обделки тоннелей станции метро «Жибек Жолы» г. Алматы// Метро и тоннели. Науч.-техн. и инф. изд. - №1. - 2006. - С. 44 - 45.

43. Гончаров Г.В. Напряженное состояние обделки коллекторного тоннеля при действии несимметричной поверхностной нагрузки// Механика подземных сооружений. - Тула: ТулПИ. - 1988. - С. 126 - 130.
44. Городецкий А.С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений. - М.: Транспорт. - 1981. - 233 с.
45. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения ГОСТ 27751-2014. Официальное издание. - М.: Стандартиформ. - 2015. - 14 с.
46. Гуджабидзе И.К. Расчет подземных сооружений в условиях влияния рельефа поверхности земли// Известия вузов. Горный журнал. - 1992. - № 6. - С. 52 - 57.
47. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.: Наука. - 1973. - 228 с.
48. Деев П.В. Математическое моделирование взаимодействия обделок параллельных тоннелей произвольного поперечного сечения с массивом грунта// Известия ТулГУ. Естественные науки. - Вып. 1. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2011. - С. 291 - 300.
49. Демешко Е.А., Косицын С.Б. Современные методы пространственного расчета конструкций подземных сооружений// Проблемы развития транспортных и инженерных коммуникаций. Проектирование, строительство, эксплуатация. - М.: ТИМР. - 1998. - №2. - С. 4 - 6.
50. Дюрелли А., Райли У. Введение в фотомеханику (поляризационно-оптический метод). Пер. с англ. - М.: Мир. - 1970. - 430 с.
51. Жумабаев Б. Аналитическая модель оценки напряженно-деформированного состояния массивов пород с горным рельефом и инженерными сооружениями// Автореферат на соискание ученой степени доктора технических наук. - Бишкек. - 1993. - 35 с.
52. Жумабаев Б., Степанов В.Я., Ходасевич Г.Б. Влияние рельефа на напряженное состояние массива пород вблизи выработки// Механика горных склонов, откосов и подземных сооружений. Освоение подземного простран-

ства. Материалы 9-й Всесоюзной конференции по механике горных пород. - Фрунзе: Илим. - 1990. - С. 333 - 339.

53. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошной среды. М.: Мир. - 1974. - 239 с.

54. Золотов О.Н., Ксенофонов В.К. Расчет подземных гидротехнических сооружений методом конечных элементов в нелинейной постановке// Гидротехническое строительство. - 1983. - №12. - С.13 - 19.

55. Кассирова Н.А., Скворцова А.Е., Татарникова Е.Г. Метод натурных наблюдений за работой подземных сооружений// Гидротехническое строительство. - 1996. - №1. - С. 10 - 15.

56. Князева С.В. Математическое моделирование напряженного состояния многослойной обделки тоннеля, сооружаемого вблизи склона/ Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений// Труды международной конференции, Екатеринбург 18 - 20 мая 2004. - Екатеринбург: изд-во УГГГА. - 2004. - С. 169 - 172.

57. Ковальский Е.Р., Мозер С.П., Медведсков М.А. Оценка параметров напряженно-деформированного состояния массива в окрестности транспортной выработки// Записки Горного института. - Санкт-Петербург. - Т. 206. - 2013. - С. 78 - 80.

58. Корнеева Н.Н. Исследование зависимости напряженного состояния обделок круговых тоннелей, сооружаемых вблизи склонов от основных влияющих факторов// Горный информационно-аналитический бюллетень № 11. - 2001. - М.: изд-во МГГУ. - С. 142 - 145.

59. Корнеева Н.Н. Напряженное состояние кольца, подкрепляющего отверстие в весоной полуплоскости с наклонной границей// Современные проблемы математики, механики, информатики: Тез. док. 15 - 17 февраля. - Тула. - 2000. - С. 82 - 83.

60. Корнеева Н.Н. Расчет обделок тоннелей, сооружаемых вблизи склонов, на действие собственного веса пород// Горный информационно-аналитический бюллетень. - М.: МГГУ. - 2000. - №10. - С. 106 - 109.

61. Корнеева Н.Н., Князева С.В., Гребенщиков С.В. Определение напряженного состояния массива пород вокруг круговой выработки, расположенной вблизи склона// Известия ТулГУ. Серия: Геомеханика. Механика подземных сооружений. Вып. 1. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2003. - С. 176 - 179.
62. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир. - 1987. - 328 с.
63. Кузнецова Т.С., Мещеряков Ю.Б., Некерова Т.В. Предельная высота подработанного откоса подземными выработками при действии объемных сил// Вестник МГТУ им. Г.И. Носова. - 2009. - № 3. - С. 5 - 8.
64. Курленя М.В., Миренков В.Е. Методы расчета подземных сооружений. - Новосибирск: Наука. - 1986. - 232 с.
65. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука. - 1973. - 736 с.
66. Лебедев М.О., Балыкин В.В. Горно-экологический мониторинг на примере Большого Петлевого тоннеля// Метро и тоннели. - М. - 2006. - №6. - С. 24 - 27.
67. Лебедев М.О., Егоров Г.Д. Напряженно-деформированное состояние обделок наклонных тоннелей, сооруженных по различным технологическим схемам// Известия ТулГУ. Технические науки. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2015. - Вып. 8. - Ч. 2. - С. 18 - 26.
68. Лебедев М.О. Формирование напряженного состояния временной крепи при строительстве транспортного тоннеля вблизи склона. Записки горного института. - Записки Горного института. - 2012. - Т. 199. С. 161 - 167.
69. Левищева О.М., Фомин А.В., Бурзяев В.С., Гатаулин В.С. Определение напряженного состояния массива пород на основе обработки результатов эксперимента// Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике. Материалы 17-ой Международной молодежной научно-практической конференции. - 2018. - С. 21 - 25.

70. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука. - 1977. - 416 с.
71. Лиманов Ю.А. Моделирование статической работы туннельных обделок методом эквивалентных материалов// Труды Гидропроекта. - Сб. 18. - 1979. - С. 46 - 54.
72. Литвиненко В.И., Щекин Н.Ф. К расчету тоннелей малого заглубления, расположенных по простиранию крутопадающих слоев скальных грунтов// Механика подземных сооружений. - Тула: ТПИ. - 1990. - С. 158 - 164.
73. Мажитов А.М. Оценка влияния подземных горных работ на напряженно-деформированное состояние прикарьерного массива месторождения Камаганское// Актуальные проблемы горного дела. - 2016. - № 1. - С. 30 - 36.
74. Марков Г.А., Савченко С.Н. О влиянии неровностей в земной поверхности на распределение напряжений в массиве пород под действием горизонтальных сил// В кн.: Разработка рудных месторождений Кольского полуострова. Апатиты: изд-во Кольск. Филиала АН СССР. - 1973. - С. 30 - 33.
75. Марков Г.А., Савченко С.Н. О некоторых особенностях распределения напряжений вокруг подготовительной выработки, расположенной вблизи очистного пространства// ФТПРПИ. - 1975. - № 3. - С. 3 - 8.
76. Марков Г.А. Тектонические напряжения и горное давление в рудниках Хибинского массива. - Л.: Наука. - 1977. - 213 с.
77. Марков Г.А. О распространении горизонтальных тектонических напряжений вблизи поверхности в зонах поднятий земной коры// Инженерная геология. - 1980. - № 1. - С. 20 - 29.
78. Марков Г.А., Савченко С.Н. Напряженное состояние пород вокруг выработок в условиях гористого рельефа и действия тектонических сил// ФТПРПИ. - 1983. - № 5. - С. 26 - 32.
79. МГСН 2.07-01. Основания, фундаменты и подземные сооружения. - М.: Москомархитектура. - 2003. - 17 с.

80. Метод фотоупругости. Т. 1. Решение задач статики сооружений. Метод оптически чувствительных покрытий. Оптически чувствительные материалы. Под ред. Хесина Г.Л. - М.: Стройиздат. - 1975. - 460 с.
81. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука. - 1966. - 707 с.
82. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. - М.: Мир. - Т. 2. - 1969. - 863 с.
83. Немировский Ю.В., Тырымов А.А. О влиянии периодического рельефа земной поверхности на распределение напряжений в массиве горных пород// Изв. АН СССР. Физика Земли. - 1979. - № 8. - С. 29 - 35.
84. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики. - М.: изд-во АСВ. - 2000. - 282 с.
85. Низомов Д.Н., Ходжибоев А.А., Ходжибоев О.А. Алгоритм расчета взаимодействия сооружения с полупространством, ослабленным выработкой в условиях плоской деформации// Вестник РУДН. Серия Инженерные исследования. - 2012. - № 1. - С. 24 - 32.
86. Низомов Д.Н., Ходжибоев А.А. Взаимодействие крепи с массивом пород вблизи прямолинейной границы полуплоскости// Вестник МГСУ. - 2012. - № 6. - С. 68 - 72.
87. Основания, фундаменты и подземные сооружения. Справочник проектировщика. Под общ. ред. Е.А. Сорочана и Ю.Г. Трофименкова. - М.: Стройиздат. - 1985. - 480 с.
88. Петрухин В.П., Разводовский Д.Е., Колыбин И.В., Кисин Б.Ф. Проектирование и расчет подземных сооружений. - НИИОСП. Изд-во Бумажная галерея. - 2008. - С. 205 - 211.
89. Протосеня А.Г., Беляков Н.А. Геомеханическое обоснование вариантов последовательности выполнения горнопроходческих работ при реконструкции двухпутных железнодорожных тоннелей в условиях Северного Кавказа// Освоение минеральных ресурсов Севера: проблемы и решения:

труды 7-й Межрегиональной научно-практической конференции. Филиал СПГГИ (ТУ) «Воркутинский горный институт». Воркута. - 2009. - Т. 1. - С. 150 - 155.

90. Протосеня А.Г., Беляков Н.А. Определение пространственного напряженно-деформированного состояния временной крепи железнодорожного тоннеля с учетом влияния земной поверхности// Известия ТулГУ. Науки о Земле. Вып. 1. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2011. - С. 158 - 166.

91. Протосеня А.Г., Беляков Н.А. Метод прогноза напряженно-деформированного состояния обделок двух взаимовлияющих тоннелей с учетом технологии строительства// Записки Горного института. Т. 199. Санкт-Петербург. - 2012. - С. 128 - 133.

92. Протосеня А.Г., Беляков Н.А., Куранов А.Д. Метод прогноза напряженного состояния комплекса тоннельных выработок сложной пространственной конфигурации с учетом взаимного влияния и последовательности строительства// Записки Горного института. Т.199. Санкт-Петербург. - 2012. - С. 17 - 24.

93. Руководство по комплексному освоению подземного пространства крупных городов/ Российская академия архитектуры и строительных наук. - М. - 2004. - 205 с.

94. Руководство по проектированию гидротехнических туннелей. - М.: Стройиздат. - 1982. - 287 с.

95. Руководство по проектированию коммуникационных тоннелей. - М.: Стройиздат. - 1979. - 70 с.

96. Руководство по проектированию подземных горных выработок и расчету крепи. - М.: Стройиздат. - 1983. - 273 с.

97. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. - Киев: Наукова думка. - 1968. - 887 с.

98. Савицкий В.В., Шейнин В.И. Назначение граничных условий и порядок расчета МКЭ мелкозаглубленных сооружений// Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1996. - №6. - С. 14 - 17.

99. Савченко С.Н. Исследование влияния бокового распора на распределение напряжений в массивах гористого строения// ФТПРПИ. - 1979. - № 6. - С. 21 - 28.

100. Савченко С.Н. Напряженное состояние полуплоскости с асимметричным выступом// Прикладная механика. - 1981. - Т. 17. - № 2. - С. 130 - 134.

101. Саммаль А.С., Анциферов С.В., Деев П.В. Аналитические методы расчета подземных сооружений: монография. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2013. - 111 с.

102. Саммаль А.С., Князева С.В. Расчет многослойной обделки тоннеля, сооружаемого вблизи склона на действие собственного веса пород// Известия ТулГУ. Серия «Геомеханика. Механика подземных сооружений». - Тула: изд-во ТулГУ. - 2004. - Вып. 2. - С. 3 - 11.

103. СП 102.13330.2012 Туннели гидротехнические. Актуализированная редакция СНиП 2.06.09-84. - М.: Минрегион России. - 2012. - 48 с.

104. СП 120.13330.2012 Метрополитены. Актуализированная редакция СНиП 32-02-2003 (с Изменениями N 1, 2). - М.: Минрегион России. - 2012. - 485 с.

105. СП 122.13330.2012 Тоннели железнодорожные и автодорожные. Актуализированная редакция СНиП 32-04-97 (с Изменением N 1). - М.: Минрегион России. - 2012. - 112 с.

106. СП 20.13330.2011 Нагрузки и воздействия. Свод правил, актуализированная редакция. - М.: Минрегион России. - 2011. - 96 с.

107. СП 22.13330.2011 Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*. - М.: Минрегион России. - 2011. - 166 с.

108. СП 23.13330.2011 Основания гидротехнических сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.02-85. - М.: Минрегион России. - 2011. - 115 с.

109. СП 32-105-2004 Метрополитены. - М.: Госстрой России. ГУП ЦПП. - 2004. - 302 с.
110. СП 69.13330.2011 Подземные горные выработки. - М.: Росстандарт. - 2011. - 22 с.
111. Справочник по механике и динамике грунтов/ В.Б. Швец [и др.]. - Киев: Будивельник. - 1987. - 232 с.
112. Степанов В.Я. Реологические процессы в скальных склонах. - В кн.: Механика горных склонов и откосов. - Фрунзе: Илим. - 1978. - С. 3-17.
113. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов: учебное пособие. - М.: изд-во Ассоциации строительных вузов. - 2005. - 488 с.
114. Терцаги К. Теория механики грунтов. - М.: Госстройиздат. - 1961. - 507 с.
115. Трумбачев В.Ф., Славин О.К. Методика моделирования горных пород методами фотомеханики. - М.: Наука. - 1974. - 99 с.
116. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. - М.: Недра. - 1987. - 221 с.
117. Филатов Н.А., Беляков В.Д., Иевлев Г.А. Фотоупругость в горной геомеханике. - М.: Недра. - 1975. - 184 с.
118. Филиппов И.И. Тоннели и метрополитены/ Часть 1: Уч. пос. - М.: РГОТУПС. - 2002. - 111 с.
119. Филиппов И.И. Тоннели и метрополитены/ Часть 2: Уч. пос. - М.: РГОТУПС. - 2002. - 127 с.
120. Фомин А.В., Андреюк Л.С. Напряженное состояние грунта вокруг неподкрепленных выработок вблизи склона// Опыт прошлого - взгляд будущего. Материалы 6-ой международной научно-практической конференции молодых ученых и студентов. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2016. - С. 215 - 220.
121. Фомин А.В., Анциферов С.В. Определение напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона// Научные исследования в области технических и технологических систем. Сборник

статей Международной научно-практической конференции. - Уфа: "ОМЕГА САЙНС". - 2018. - С. 104 - 109.

122. Фомин А.В., Анциферов С.В., Анциферова Л.Н. Разработка математической модели формирования напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона// Социально-экономические и экономические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. Материалы 13-ой Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики. - Тула: изд-во ТулГУ. - 2017. - С. 272 - 278.

123. Фомин А.В., Анциферов С.В., Анциферова Л.Н. Метод расчета обделок тоннелей, сооружаемых вблизи наклонной земной поверхности// Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике. Материалы 17-ой Международной молодежной научно-практической конференции. - 2018. - С. 224 - 231.

124. Фотиева Н.Н. Расчет крепи подземных сооружений в сейсмически активных районах. - М.: Недра. - 1980. - 222 с.

125. Фотиева Н.Н. Расчет обделок тоннелей некругового поперечного сечения. - М.: Стройиздат. - 1974. - 239 с.

126. Фотиева Н.Н., Козлов А.Н. Расчет крепи параллельных выработок в сейсмических районах. - М.: Недра. - 1992. - 231 с.

127. Фролов Ю.С., Крук Ю.Е. Метрополитены на линиях мелкого заложения. Новая концепция строительства. - М.: ТИМР. - 1994. - 244 с.

128. Хесин Г.Л., Дмоховский А.В. Исследование методом фотоупругости напряженного состояния подземных сооружений в условиях первой и второй смешанной задачи теории упругости// Труды Гидропроекта. - М.: Недра. - 1970. - № 18. - С. 103 - 120.

129. Ходосевич Г.Б. Напряженное состояние массива пород в окрестности выработки, пройденной в горном склоне// Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Институт физики и механики горных пород НАН Кыргызской Республики. Бишкек. - 1994.

(<http://fizmathim.com/napryazhennoe-sostoyanie-massiva-porod-v-okrestnosti-vyrabotki-proydennoy-v-gornom-sklone>).

130. Ходосевич Г.Б. О влиянии рельефа поверхности на распределение напряжений в окрестности подземной выработки// Проблемы разработки полезных ископаемых в условиях высокогорья. - Бишкек. - 1991. - С. 34 - 35.

131. Чеботаев В.В. Моделирование напряженно-деформированного состояния обделок тоннелей и окружающего массива методом конечных элементов// Проблемы развития транспортных и инженерных коммуникаций. Проектирование, строительство, эксплуатация. - М.: ТИМР. - 1998. - №2. - С. 12 - 13.

132. Шейнин В.И. Геомеханика в расчетах и проектировании малоуглубленных подземных сооружений (особенности и проблемы)// Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1992. - №3.

133. Шейнин В.И., Савицкий В.В. Определение нагрузки на границе области при расчете подземных сооружений методом конечных элементов// Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. - 1992. - № 4. - С. 10 - 14.

134. Шерман Д.И. Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы// Докл. АН СССР. - 1961. - Т. 27. - С. 527 - 563.

135. Addenbrooke T.I., Potts D.M. Twin tunnel construction - Ground movements and lining behavior// Proceedings of the international symposium on Geotechnical aspects of underground Construction in soft Ground/ London / UK / 15 - 17 April/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 1996. - P. 441 - 446.

136. Bakker K.I., W.van Schelt, Plekkenpol I.W. Predictions and a monitoring scheme with respect to the boring of the second Heinenoord Tunnel// Proceedings of the international symposium on Geotechnical aspects of underground Construction in soft Ground/ London / UK / 15 - 17 April/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 1996. - P. 459 - 464.

137. Bernat S., Cambou B., Dubois P. Numerical modelling of tunneling in soft soil// Proceedings of the international symposium on Geotechnical aspects of underground Construction in soft Ground/ London/ UK/ 15 - 17 April/ A.A. Balkema/ 1996. - P. 465 - 470.

138. Bulychev N.S., Goncharov G.V. Design of shallow embedding tunnel linings// International Congress on Rock Mechanics. - Aachen. - Deutschland. - 1991. - P. 1267 - 1271.

139. Canetta G., Cavagna B., Nova R. Experimental and Numerical Tests on the Excavation of a Railway Tunnel in Grouted Soil in Milan// Proc. Int. Symp. Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground, London. - 1996. - P. 479 - 484.

140. Chryssanthakis P., Tunbridge L., Christianson R. Numerical modelling in 3D of the TBM/ZEDEX tunnels, Aspo Hard Rock Laboratory and comparison with in-situ measurements/ Proc. of Underground Construction 2003. International Exhibition and Symposium. 24 - 25 September, London Docklands, UK. - Hemming Group Ltd. - 2003. - P. 705 - 716.

141. Cividini A., Gioda G., Sterpi D. On the influence of strain softening in the numerical analysis of geotechnical problems// Proceedings of the third international conference on advances of computer methods in Geotechnical and Geoenvironmental engineering. Moscow/ Russia/ 1 - 4 February/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 2000. - P. 207 - 213.

142. Dasari G.R., Rawlings C.G., Bolton M.D. Numerical modelling of a NATM tunnel construction in London clay// Proceedings of the international symposium on Geotechnical aspects of underground Construction in soft Ground/ London/ UK/ 15 - 17 April/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 1996. - P. 491 - 496.

143. Egger P. Tunnel construction in Stuttgart: Problems of settlements and swelling rock// Proceedings of the international symposium on Geotechnical aspects of underground Construction in soft Ground/ London/ UK/ 15 - 17 April/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 1996. - P. 263 - 268.

144. Farias M.M., Assis A.P. Numerical simulation of a tunnel excavated in a porous collapsible soil// Proceedings of the international symposium on Geotechnical aspects of underground Construction in soft Ground/ London/ UK/ 15 - 17 April/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 1996. - P. 501 - 506.

145. Fotieva N., Antsiferov S., Sammal A., Bulychev N. Design of parallel circular tunnels constructed in urban areas// Proc. of the 14th European Conf. of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. Madrid, Spain, 22-27 September. - Rotterdam: Millpress Silence Publishers. - 2007. - P. 1093 - 1097.

146. Fotieva N.N., Antziferov S.V., Korneeva N.N. Designing tunnel linings located near slopes// Geotechnics 99. The base of the modern technologies of constructions. Ostrava. Csech republic. 21 - 22 september 1999. - P. 88 - 90.

147. Fotieva N.N., Bulychev N.S., Antziferova L.N. Designing multi-layer lining of shallow tunnels. Proceedings of the World Tunnel Congress'98 on Tunnels and Metropolises Sao Paulo/ Brazil/ 25-30 April, A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/1998. - P. 293 - 298.

148. Fotieva N.N., Bulychev N.S., Sammal A.S. Design of shallow tunnel linings/Prediction and Performance in Rock Mechanics and Rock Engineering. EUROCK'96/Torino/Italy. - A.A. Balkema, Rotterdam, Brookfield. - P.677 - 680.

149. Fricker S.O., Alder A.J. The use of 3-dimentional numerical analysis in tunnel design// Underground Construction 2001/ International Exhibition& Symposium 18-20 September, EXCEL, London, Docklands, UK. - 2001. - P. 449 - 461.

150. Higgins K.G., Mair R.I., Potts D.M. Numerical modelling of the influence of the Westminster Station excavation and tunnelling on the Big Ben clock tower// Proceedings of the international symposium on Geotechnical aspects of underground Construction in soft Ground/ London/ UK/ 15-17 April/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 1996. - P.525 - 530.

151. Kropik C., Mang H., Meschke G. Synthesis of Constitutive Modelling and Numerical Simulations in the Context of the Excavation of Shallow Tunnels by the NATM// Computational Methods in Applied Sciences'96: Invit. Lect. and

Spec. Technol. Sess. 3 rd ECCOMAS Comput. Fluid Dyn. Conf. and 2 rd ECCOMAS Conf. Number. Meth. Eng., Paris, 9-13 Sept. - Chichester etc. - 1996. - P. 218 - 226.

152. Potts D.M., Zdravkovic L. Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Theory. - Thomas Telford Limited. - 1999. - 440 p.

153. Potts D.M., Zdravkovic L. Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Application. - Thomas Telford Limited. - 1999. - 448 p.

154. Pracovsky J. Some aspects of contact stress measurements around tunnels/ Proc. Int. Symp. Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground, London. - 1996. - P. 307 - 310.

155. Static analysis of a lined shallow tunnel under surface loading// Report 126/00 - NEGE/NDE// Laboratorio Nacional de Engenharia Civil// Lisbon, March. - 2000.

156. Venugopala Rao R., Naik S., Reddy M.N., Gupta R.N. Discontinuum analysis and support design of road tunnels - A case study// Proceedings of the third international conference on advances of computer methods in Geotechnical and Geoenvironmental engineering. Moscow/ Russia/ 1-4 February/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 2000. - P.141 - 150.

157. Vieira A., Sousa L.R., Barreto J. Numerical investigations for the analysis of a large underground station of Lisbon Metro// Proceedings of the third international conference on advances of computer methods in Geotechnical and Geoenvironmental engineering. Moscow/ Russia/ 1 - 4 February/ A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield/ 2000. - P.151 - 156.

158. Устойчивость (напряженно-деформированное состояние): св-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2009613499/ А.Н. Богомолов [и др.]. Зарег. 30 июня 2009 г.

159. FEA: св-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2015617889/ А.Н. Богомолов [и др.]. Зарег. 23 июля 2015 г.

Электронные ресурсы:

160. <https://dic.academic.ru/>

161. <https://ru.wikipedia.org/>
162. <http://undergroundexpert.info/>
163. <http://docs.cntd.ru/>
164. <https://elibrary.ru/>
165. <https://cyberleninka.ru/>