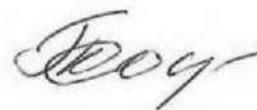


Направахрукописи



Бодягина Ксения Сергеевна

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ
И ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В УСЛОВИЯХ
ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ МКЭ
И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.».

Научный руководитель: Доктор технических наук, профессор
Крысько Вадим Анатольевич

Официальные оппоненты: **Радченко Владимир Павлович**
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Самарский государственный техниче-
ский университет», заведующий кафедрой «При-
кладная математика и информатика»

Шитикова Марина Вячеславовна
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный тех-
нический университет», главный научный сотруд-
ник международного научного центра по фунда-
ментальным исследованиям в области естествен-
ных и строительных наук имени Заслуженного дея-
теля науки РФ профессора Ю.А. Россихина

Ведущая организация – ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федераль-
ный университет"

Защита состоится «16» мая 2023 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.417.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, Тула, пр. Ленина, 92 и на сайте <http://tsu.tula.ru/science/dissertation>

Автореферат разослан « » 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета  Соколова Марина Юрьевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Важным вопросом является проектирование пластин сложной формы и новых композиционных материалов, обладающих улучшенными эксплуатационными характеристиками, что представляет для производства не только теоретическую, но и практическую ценность. С помощью методов, основанных на топологической оптимизации, могут быть созданы новые материалы с оптимальной структурой и особыми многофункциональными механическими и термическими свойствами, а также спроектированы элементы механических структур, обладающих оптимальными свойствами. Большой вклад в развитие данной темы внесли Чжоу М., Розвани Г., Сигмунд О., Сванберг К., Победря Б.Е., Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П., Малмейстер А.К., Санчес-Паленсия Е., Тамуж В.П., Тетерс Г.А., Тарнопольский Ю.М., Рвачев В. Л., Ильюшин А.А., Биргер И.А., Ворович И.И., Берт, Амбарцумян С.А., Красовский Ю.П., Трещёв А.А., Толоконников Л.А., Крысько В.А., Крысько А.В.

Актуальной областью исследований является изучение напряженно-деформированного состояния балок и пластин на основе численных методов анализа, таких как МКЭ, однако нет работ по анализу механических и термомеханических характеристик с учетом пластических деформаций элементов конструкций в виде пластин сложной формы в трехмерной постановке. В настоящее время решены некоторые задачи топологической оптимизации элементов конструкций, в которых область оптимизации состоит из двух материалов. На сегодняшний день вопрос топологической оптимизации конструкций из нескольких материалов изучен недостаточно. Большое количество работ посвящено оптимальному проектированию микроструктур композиционных материалов на основе методов топологической оптимизации и гомогенизации, но при проектировании не учитывалось наличие отверстий, технологических включений и межфазного слоя, также для таких материалов не была изучена задача многоцелевой оптимизации при конкурирующих механических и термических свойствах фаз, входящих в композиционный материал.

Целью работы является разработка математических моделей, алгоритмов и методов анализа механических и термомеханических структур в виде пластин сложной формы в трехмерной постановке на основе метода конечных элементов с учетом упругопластических деформаций, проектирование элементов конструкций, состоящих из нескольких фаз материалов, на основе модификации метода топологической оптимизации и композиционных материалов с улучшенными эксплуатационными характеристиками; проверка адекватности полученных моделей топологической оптимизации конструкций на основе данных натурального эксперимента; построение математических моделей, алгоритмов и методов для проектирования композиционных материалов, обладающих оптимальным набором эффективных свойств на основе топологической оптимизации с учетом наличия отверстий, технологических включений и межфазного слоя, решение задачи многоцелевой топологической оптимизации термических и механических свойств композиционных материалов.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Построение математических моделей, алгоритмов и комплексов программ для изучения напряженно-деформированного и упругопластического состояния элементов конструкций в виде пластин сложной формы на основе метода конечных элементов.

2. Реализация алгоритма и программ для вычисления эффективных характеристик композиционных материалов на основе метода асимптотической гомогенизации.

3. Разработка теории и алгоритмов проектирования топологически оптимальных конструкций по критериям прочности, состоящих из однокомпонентных и многокомпонентных материалов.

4. Проверка адекватности полученных алгоритмов и численных результатов на основе данных натурного эксперимента для задачи топологической оптимизации армирования элемента микромеханических приборов в виде пластины с вырезами.

5. Разработка математических и алгоритмических основ топологической оптимизации композиционных материалов, обладающих улучшенными характеристиками растяжения, сжатия, теплопроводности с учетом пор, технологических включений и межфазного слоя.

Предметом исследования является построение алгоритмов и программ для исследования напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в виде пластин сложной формы с учетом пластических деформаций и проектирование топологически оптимальных конструкций, обеспечивающих минимум или максимум отклика структуры при заданных ограничениях и композиционных материалов с эффективными свойствами при помощи метода конечных элементов.

Методы исследования

Для проведения исследований используются методы топологической оптимизации, методы функционального анализа, методы асимптотической гомогенизации, метод скользящих асимптот, метод конечных элементов (МКЭ), метод переменных параметров упругости.

Личный вклад

Диссертация базируется на результатах, полученных лично автором. Выбор направления исследования и формулировки задач осуществлялся лично автором, либо совместно с научным руководителем. Автору принадлежит ведущая роль в построении алгоритмов топологической оптимизации композиционных материалов и механических структур с учетом температурного воздействия. Диссертация соответствует п.п. 1, 3, 4, 5, 6, 8 паспорта специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Научная новизна:

1. Разработаны алгоритмы и комплексы программ для исследования напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы с учетом пластических деформаций (п. 1, 4, 8 паспорта специальности 1.2.2.).

2. Реализованы алгоритмы и комплексы программ для вычисления объемного модуля жесткости, модуля сдвига и коэффициента теплопроводности композиционных материалов на основе метода асимптотической гомогенизации (п. 1, 4, 8 паспорта специальности 1.2.2.).

3. Построена математическая модель проектирования топологически оптимальных конструкций по критериям прочности. Решен ряд новых задач оптимизации, имеющих практическое приложение, отличающихся введением нового класса функций для интерполяции материала в многокомпонентных конструкциях (п. 1, 3, 5 паспорта специальности 1.2.2.).

4. Достоверность полученного алгоритма метода топологической оптимизации и полученных результатов подтверждается совпадением численных результатов по

предложенным методам и натурным экспериментом для задачи топологической оптимизации армирования элемента микромеханических приборов в виде пластины с вырезами; полученная оптимальная структура конструкции увеличивает предельное разрывное усилие конструкции (п. 6 паспорта специальности 1.2.2.).

5. Разработаны методы и алгоритмы проектирования композиционных материалов и их топологической оптимизации с целью получения заданных механических и термомеханических свойств на основе метода гомогенизации, спроектированы композиционные материалы, отличающиеся наличием пор в структуре, технологических включений с учетом межфазного слоя. Решена задача топологической оптимизации микроструктуры материалов, отличающихся особыми многофункциональными свойствами при конкурирующих механических и термических свойствах фаз, входящих в композиционный материал (п. 1, 3, 4, 5 паспорта специальности 1.2.2.).

Теоретическая значимость

Построены математические модели, созданы алгоритмы и комплексы программ для исследования термоупругопластического состояния пластин сложной формы в трехмерной постановке на основе МКЭ и метода переменных параметров упругости. Разработан модифицированный метод интерполяции материала для задачи топологической оптимизации конструкций, содержащих компоненты более чем из двух материалов с использованием одной непрерывной переменной проектирования. Метод позволяет распределить фазы материала так, чтобы получить оптимальные структурные характеристики. Могут быть получены надежные конструкции из нескольких материалов с улучшенными механическими характеристиками. Реализован алгоритм вычисления эффективных характеристик композиционных материалов на основе метода асимптотической гомогенизации. Разработаны математические и алгоритмические основы проектирования композиционных материалов на основе методов гомогенизации и топологической оптимизации, позволяющие получить материалы, оптимальные по различным критериям при конкурирующих механических и термических свойствах, входящих в материал компонентов. Построенные математические модели позволят спроектировать композиционные материалы, описать поведение композиционных механических структур в сложных условиях окружающей среды с учетом поля температур.

Практическая значимость

Получены численные результаты по анализу термоупругопластического состояния пластин сложной формы, которые могут быть использованы при проектировании конструкций широкого применения (в машиностроении, приборостроении, авиационной промышленности, медицине и др.), содержащих в качестве структурных элементов перфорированные пластины, которые находятся в ходе эксплуатации под действием механических и термических нагрузок.

По разработанным алгоритмам и методам получены оптимальные структуры конструкций, состоящих из нескольких фаз материалов с улучшенными показателями прочности. Численные результаты по предложенным методам хорошо согласуются с проведенным совместно с автором натурным экспериментом для задачи топологической оптимизации армирования элемента приборов в виде пластины с вырезами. Спроектированы микроструктуры композиционных материалов, имеющих в структуре поры, технологические включения с учетом межфазного слоя, и композиционные материалы с особыми многофункциональными свойствами при конкурирующих механических и термических свойствах фаз, входящих в композиционный материал.

Результаты работы используются как в научно-исследовательской деятельности, так и в учебном процессе.

Исследования проводились при финансовой поддержке:

Гранта РФФИ № 19-31-90064 «Аспиранты» Создание новых композиционных многокомпонентных метаматериалов с оптимальной микроструктурой на основе методов топологической оптимизации.

Грантов РФФИ № 16-11-10138, РФФИ № 16-11-10138-П Сложные колебания нанобалочно-пластинчато-оболочечных систем из гетерогенных материалов под действием теплового поля и белого шума.

Грантов РФФИ № 20-08-00354, РФФИ № 17-03-00720.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1. Математические модели и созданные комплексы программ анализа термоупругопластического состояния пластин сложной формы в трехмерной постановке позволяют проанализировать их упругопластическое состояние при любых краевых условиях и зависимостях интенсивности напряжения-деформации.

2. Разработанные алгоритмы на основе метода асимптотической гомогенизации позволяют вычислять эффективные характеристики композиционных материалов с учетом наличия в их структуре включений, отверстий и межфазного слоя.

3. Разработанные алгоритмы проектирования топологически оптимальных по определенным критериям конструкций позволяют смоделировать структуры, состоящие из двух или нескольких материалов с улучшенными критериями прочности.

4. Достоверность полученного алгоритма метода топологической оптимизации и полученных на его основе численных результатов хорошо согласуются с натурным экспериментом, полученная оптимальная структура конструкции увеличивает предельное разрывное усилие на 51,3 %.

5. Разработанные математические и алгоритмические основы проектирования композиционных материалов и их топологической оптимизации позволяют получить структуры композиционных материалов с оптимальными механическими и термомеханическими свойствами с учетом наличия отверстий, технологических включений и межфазного слоя. Разработанные алгоритмы позволяют решить задачу топологической оптимизации микроструктуры материала с особыми многофункциональными термомеханическими свойствами, получены оптимальные микроструктуры материалов в зависимости от весового коэффициента механического и термического критерия.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгой математической и физической постановкой рассматриваемых задач, обоснованным применением численных методов, тестированием полученных численных алгоритмов. Достоверность полученного алгоритма топологической оптимизации подтверждается совпадением численных результатов по предложенным методам и натурным экспериментом. Проведены численные исследования сходимости используемых методов, а также сравнение с результатами вычислений других авторов. Даны положительные экспертные оценки результатов при обсуждении основных результатов на конференциях и форумах.

Апробация. Основные положения и результаты работы представлялись на конференциях: 1. The Fifth Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM), 2020; 2. XX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», 2020; 3. 14th Sino-Russia Symposium on Advanced Materials on

Advanced Materials and Technologies, Beijing – Москва, ИМЕТ РАН; 4. VII и VIII Международные конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов», Москва, ИМЕТ РАН; 5. В окончательном виде работа докладывалась на семинаре кафедры «Математика и моделирование» СГТУ имени Гагарина Ю.А. под руководством профессора Крысько В.А. и на семинаре ТулГУ под руководством профессора Иванова В.И.

Публикации. Результаты исследования опубликованы в 38 печатных работах, в том числе – 4 публикации в изданиях из списка ВАК Минобрнауки России, 11 – в журналах Scopus, из них 6 – в высокорейтинговых журналах Q1, 2 статьи в журналах Q2, и 23 публикации в прочих изданиях РИНЦ. Получено 2 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка использованной литературы. Полный объем работы составляет 143 страницы текста, включая 68 рисунков, 17 таблиц. Список литературы содержит 161 источник.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведены обоснования актуальности темы, проведен краткий исторический обзор литературных источников по теме исследования, поставлена цель и определены задачи работы, обозначены методы, используемые для проведения исследования, подчеркнута теоретическая и практическая значимость работы, отмечены достоверность полученных результатов и личный вклад в исследование автора.

В **первой главе** рассмотрена задача исследования напряженно-деформированного состояния элементов конструкций в виде пластин сложной формы и композиционных материалов в условиях термомеханического воздействия. На основе метода конечных элементов созданы программы анализа напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы, построена математическая модель пространственной задачи теории упругости с учетом физической нелинейности при помощи итерационного метода И.А. Биргера и метода гомогенизации. Построен алгоритм и создана программа вычисления эффективных упругих характеристик композиционных материалов при помощи метода асимптотической гомогенизации.

При проектировании конструкций рассмотрения напряженно-деформированного состояния деталей в пределах линейной теории упругости на практике зачастую недостаточно из-за того, что большинство конструкционных материалов подчиняются линейному закону Гука лишь при малых деформациях, во многих случаях эксплуатируются при деформациях, превышающих линейные. Для численного исследования применяется МКЭ в сочетании с методом переменных параметров упругости И.А. Биргера, доказательства теорем сходимости которого принадлежат академику Воровичу И.И. и профессору Красовскому Ю.П., в работе проведены численные исследования сходимости метода.

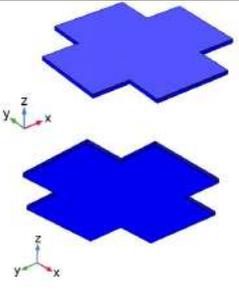
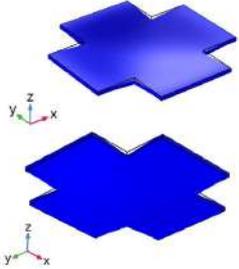
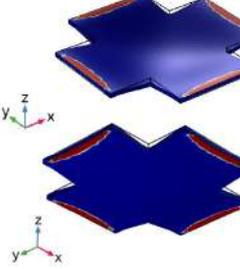
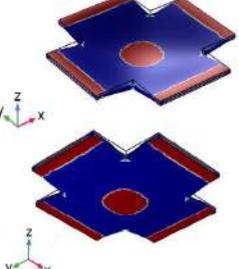
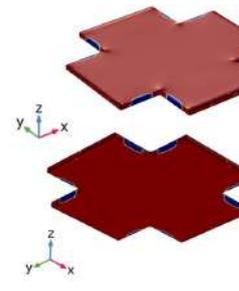
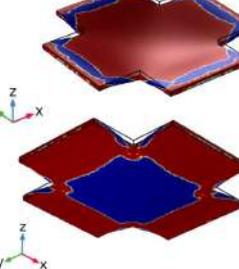
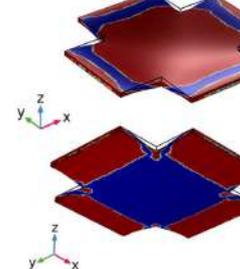
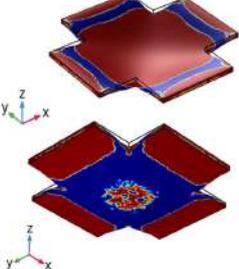
Согласно методу переменных параметров упругости Биргера И.А. коэффициент Пуассона $\nu(e_i, x, y, z, T)$, модуль Юнга $E(e_i, x, y, z, T)$ и модуль сдвига G зависят от координат x, y, z и интенсивности деформаций e_i . Тем самым параметры Ламе λ, μ также зависят от координат. T – распределение температур, вычисленное из решения стационарной задачи теплопроводности из трехмерного уравнения. После соответствующих преобразований уравнения равновесия переписываются в виде

$$\left\{ (\lambda + \mu)\theta_x + \mu \Delta u + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \theta + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} + q_x = 0, \right. \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – частные производные θ по координатам x, y, z соответственно, α_T – коэффициент линейного расширения. Основные формулы метода переменных параметров упругости были использованы с учетом разномодульности материала. Пусть имеется изотропная трёхмерная пластинка, которая имеет длину a , высоту h и толщину b . Во всех рассмотренных задачах пластинка закреплена по боковым граням, то есть $(u = v = w = 0)$. На верхней грани действует нагрузка q .

В работе в качестве примеров пластин произвольного плана были исследованы пластины нескольких конфигураций. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние и распределение упругопластических деформаций при действии температурного поля, а также без учета температурного поля в качестве частного случая. В качестве примера приведем пластинку с четырьмя вырезами по углам. В таблице 1 приведены упругопластические деформации и зависимость перемещений w от нагрузки для разных температур.

Таблица 1 – Упругопластические деформации и зависимость перемещений w от нагрузки для разных температур

	$q=0$	$q=10$	$q=20$	$q=30$
$T=0$				
$T=200$				

Для улучшения эксплуатационных характеристик конструктивных элементов требуется создание современных материалов с улучшенными характеристиками. Широко используемыми в современной промышленности материалами являются композиционные материалы, которые имеют периодически повторяющуюся структуру, образованную набором элементов, периодических ячеек.

В работе делаются следующие предположения: композиционный материал является линейно упругим, макроскопически трансверсально изотропным как по механическим, так и по тепловым параметрам. Начальные напряжения отсутствуют; включения являются однородными, линейно упругими, изотропными и регулярно упакованными; матрица является: однородной; линейно упругой, изотропной по механическим и тепловым параметрам. Композиционный материал имеет периодически по-

вторяющуюся структуру, образованную набором минимальных элементов, называемых периодическими ячейками. Метод гомогенизации является эффективным подходом к вычислению глобальных физических свойств композиционного материала, таких как объемный модуль жесткости, модуль сдвига или коэффициент теплопроводности.

Аппроксимируем смещение произвольной материальной точки в упругом теле двух масштабным асимптотическим разложением и, проведя преобразования, получаем тензор эффективных упругих свойств в виде

$$C_{ijkl}^e = \frac{1}{|Y|} \int_Y C_{pqrs} (\varepsilon_{pq}^{0(ij)} - \varepsilon_{pq}^{*(ij)}) (\varepsilon_{rs}^{0(kl)} - \varepsilon_{rs}^{*(kl)}) dY, \text{ где } |Y| \text{ обозначает площадь элементарной}$$

ячейки, $\varepsilon_{pq}^{*(ij)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi_p^{ij}}{\partial y_q} + \frac{\partial \chi_q^{ij}}{\partial y_p} \right)$ и $\varepsilon_{pq}^{0(ij)}$ – линейно независимые тестовые деформации на

базовой ячейке, применяемые для определения характеристик поля деформаций $\varepsilon_{pq}^{*(ij)}$.

Здесь χ^{ij} – решение следующей задачи на элементарной ячейке периодичности

$$\int_Y (\varepsilon_{pq}^{0(ij)} - \varepsilon_{pq}^{*(ij)}) C_{pqrs} \varepsilon_{rs}^*(v^{kl}) dY \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_Y \text{ и } \mathbf{V}_Y = \mathbf{v}(\mathbf{y}) - \text{множество достаточно гладких функ-}$$

ций, определенных в Y и являющихся Y периодическими.

На двумерной ячейке для изотропного материала гомогенизированный упругий тензор C_{ijkl}^e имеет три компоненты $C_{1111}^e, C_{1122}^e, C_{1212}^e$, необходимы три тестовых поля деформаций, которые принимают форму $\varepsilon_{pq}^{0(11)} = [1 \ 0 \ 0]$, $\varepsilon_{pq}^{0(22)} = [0 \ 1 \ 0]$ и $\varepsilon_{pq}^{0(12)} = [0 \ 0 \ 0,5]$.

Подставляя значения тестовых полей деформаций, получаем все компоненты упругого тензора C_{ijkl}^e . Теперь K^e – эффективный объемный модуль, G^e – эффективный модуль сдвига могут быть вычислены $K^e = (C_{1111}^e + C_{1122}^e)/2$, $G^e = C_{1212}^e/2$.

Для расчета эффективного коэффициента теплопроводности элементарной периодической ячейки применяется метод гомогенизации, в котором гомогенизированные выражения могут быть получены из уравнений теплопроводности. Для измерения общей эффективной проводимости материала может служить выражение $tr(\mathbf{k}^e) = k_{11}^e + k_{22}^e$, где k_{11}^e, k_{22}^e – компоненты тензора эффективной термической проводимости. Погрешность вычислений по полученному алгоритму в сравнении с другими авторами составляет 0,5 %.

Во **второй главе** рассматривается вопрос топологической оптимизации конструкций. Задача топологической оптимизации состоит в наилучшем распределении материала по области проектирования при воздействии на нее нагрузок и заданных ограничениях. В общем случае разработанный алгоритм может быть применен для широкого класса задач оптимизации, включая оптимизацию податливости, напряженного состояния, частот, смещений, теплопроводности и др.

Фундаментальная математическая формулировка задачи топологической оптимизации на основе плотности содержит функцию цели, набор ограничений представления физической системы, например по методу конечных элементов. Задача топологической оптимизации формулируется при помощи интерполяции материалов, основанной на методах явной параметризации, где вместо набора упругих свойств микроструктуры каждый конечный элемент содержит только одну проектную переменную. Для решения задач оптимизации для конструкций, состоящих более чем из

двух материалов, вводится их сортировка по возрастанию нормированной плотности материала ρ_i^T , классическая степенная интерполяция материала для случая многокомпонентной оптимизации принимает вид

$$E_e(\rho_e) = E_i + \frac{E_i - E_{i+1}}{\rho_i^p - \rho_{i+1}^p} \rho_e^p - \frac{E_i - E_{i+1}}{\rho_i^p - \rho_{i+1}^p} \rho_i^p, \quad (2)$$

где E_i, E_{i+1} – модули Юнга для материалов в сортировке с номерами i и $i+1$.

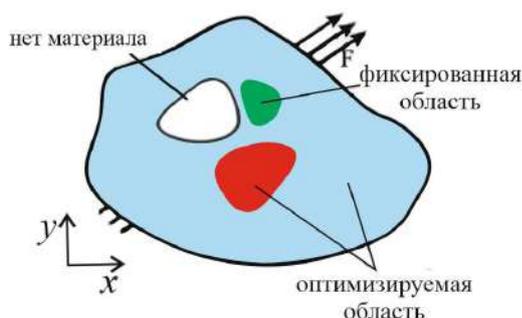


Рис. 1. Расчетная схема конструкции для многокомпонентной топологической оптимизации

Рассмотрим многокомпонентную конструкцию, изображенную на рис. 1. Конструкция состоит из области, состоящей из двух или более фаз материалов, на которой будет решаться задача оптимизации (оптимизируемая область), также конструкция может содержать технологические отверстия и включения (фиксированные области). К границам приложены нагрузки F или применены условия закрепления. Моделирование проектируемой области построено при помощи мо-

дифицированного метода интерполяции материалов SIMP.

Задачи расчета физических характеристик конструкции решаются при помощи

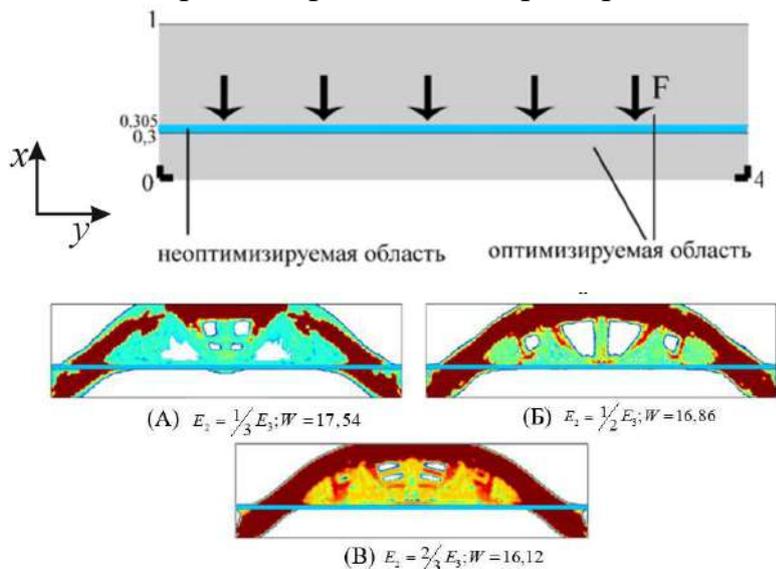


Рис. 2. Расчетная схема мостовой конструкции и ее топологическая оптимизация при модуле Юнга

$$E_2 = \frac{1}{3} E_3, \frac{1}{2} E_3, \frac{2}{3} E_3$$

метода конечных элементов. В работе рассматривается плоскодеформированное состояние конструкций. Применяется алгоритм поиска оптимума методом подвижных асимптот.

На рис. 2 приведен частный случай многокомпонентной конструкции, моделирующей мостовую конструкцию, где важно обеспечить наибольшую прочность с сохранением общего веса конструкции. Эффективным подходом к решению задач на прочность является энергетический подход, где критерием прочности является энергия деформации конструкции W . Конструкция содержит фиксированную область, обозначенную синим цветом, состоящую из бетона марки В-25 с модулем Юнга $E_3 = 300 \cdot 10^8 \text{ Па}$, мостовое полотно, где приложена механическая нагрузка сверху F , Нижние углы конструкции имеют жесткое закрепление. Оптимизируемая область состоит из 3 фаз материала с заданным количественным соотношением, которые необходимо распределить наилучшим образом так, чтобы снизить

энергия деформации конструкции W . Конструкция содержит фиксированную область, обозначенную синим цветом, состоящую из бетона марки В-25 с модулем Юнга $E_3 = 300 \cdot 10^8 \text{ Па}$, мостовое полотно, где приложена механическая нагрузка сверху F , Нижние углы конструкции имеют жесткое закрепление. Оптимизируемая область состоит из 3 фаз материала с заданным количественным соотношением, которые необходимо распределить наилучшим образом так, чтобы снизить

общую энергию деформации W . При построении модели использовались фиктивные материалы, на основании проведенных численных экспериментов штрафной коэффициент p был выбран равным 5.

Рассмотрим алгоритм топологической оптимизации для минимизации энергии деформации W за счет увеличения плотности в областях с более высокой чувствительностью при соблюдении ограничений на количество каждого из материалов. Целевая функция для данного класса задач может быть представлена в виде линейной комбинации безразмерной функции энергии деформации и функции штрафа:

$$f = \frac{1-q}{W_0} \int_{\Omega} W(x) d\Omega + q \frac{h_0 h_{\max}}{A} \int_{\Omega} |\nabla \rho(x)|^2 d\Omega, \quad (3)$$

где Ω – область оптимизации и $1/W_0$ – нормирующий множитель. Второе слагаемое – штрафная функция для исключения эффекта шахматной доски в оптимальной структуре. При этом должно быть выполнено следующее ограничение: $0 \leq \int_{\Omega} \rho_i(x) d\Omega \leq \gamma_i A$,

где γ_i – допустимая доля каждого из материалов с плотностью ρ_i , A – площадь области оптимизации Ω .

Расчеты для данной конструкции были проведены для разбиения на 11314 конечных и 607 граничных элементов. Количество степеней свободы составляет примерно 24000.

В области оптимизации определены 3 фазы материала с модулями Юнга $E_1 = 1 \cdot 10^{-9}$ (пустота) $E_2 = 100, 150, 200$ (для трех разных случаев), $E_3 = 300$, а также заданы ограничения на количество каждого из материалов $\gamma_2 = 0,25$; $\gamma_3 = 0,4$. В результате оптимизации были получены топологии, приведенные на рис. 3 при различных значениях модуля Юнга для материала E_2 . Здесь красным цветом обозначены области, заполненные материалом $E_3 = 300$, белым – материалом $E_1 = 1 \cdot 10^{-9}$, оптимальная топология для значения $E_2 = 100$ (обозначен голубым в оптимизируемой области), значение энергии деформации W для данной конструкции – 17,54, оптимальная топология для значения $E_2 = 150$, обозначен зеленым цветом, значение энергии деформации W для данной конструкции – 16,86, оптимальная топология для значения $E_2 = 200$, показан оранжевым цветом, значение W для данной конструкции – 16,12. Для получения оптимальной топологии в данном примере предлагаемым методом достаточно 45 шагов оптимизации. Для других рассмотренных примеров количество шагов отличалось незначительно. Такое небольшое количество итераций демонстрирует высокую сходимость и эффективность данного метода.

В работе показаны численные результаты примеров применения топологической оптимизации при моделировании конструкций различного применения, для каждого из которых формулируется задача топологической оптимизации, проводится выбор метода интерполяции материалов.

Рассматривается топологическая оптимизация микроструктуры усиливающей арматуры с учетом ограничений по напряжениям для пластинок. Получена оптимальная микроструктура армирования и проведен натурный эксперимент для этой структуры.

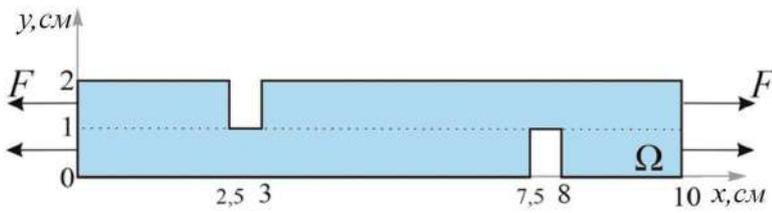


Рис. 3. Конструкция рассматриваемой пластины

нейшем будем называть базовой структурой.

К пластине прикладывается нагрузка $F = 36 \text{ кН}$. Требуется создать оптимальную структуру армирования пластины из углепластика с модулем Юнга $E_a = 120 \text{ ГПа}$ и пределом прочности $\sigma_{B1}^a = 800 \text{ МПа}$ с целью увеличения ее прочности при заданном количестве армирующего материала. Будем минимизировать величину максимального напряжения по Мизесу за счет армирования усиливающими элементами из углепластика базового материала пластины при условии, что объем армирующего материала в оптимальной конструкции не превосходит заданной величины.

Функция цели примет вид

$$\min_{\rho(x)} \int_{\Omega} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^q d\Omega, \text{ при } 0 \leq \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \gamma A, 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad (4)$$

где γ – доля армирующего материала. Интерполяция материала в данной задаче принята в виде

$$E = E_b + \rho^p (E_a - E_b), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

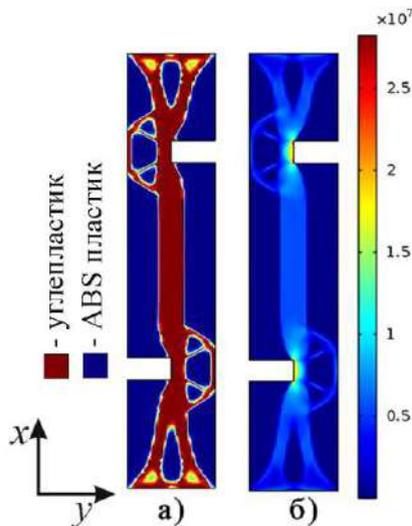


Рис. 4. а) Оптимальная структура пластины (рис. 3); б) Напряжения Мизеса в оптимальной структуре

На рис. 4а представлена полученная оптимальная топология микроструктуры армирования пластины. Здесь синим цветом выделен базовый материал пластины, а красным – углепластик, укрепляющий конструкцию.

На рис. 4б показано распределение напряжений σ_{mises} по площади пластины при оптимальном армировании. Запас прочности в базовой конструкции 3,5 раза ниже, чем в конструкции с оптимальным армированием. Зона разрушения контрольного образца из пластика ABS практически лишена остатков волокон структуры. Образцы с топологически оптимальной армирующей структурой имеют более узкую зону разрушения, что показывает эффективность используемых алгоритмов и методов топологической оптимизации конструкций.

методов топологической оптимизации конструкций.

Вопросом **третьей главы** является проектирование композиционных материалов с оптимальными эффективными характеристиками. Поставлены и решены задачи топологической оптимизации композиционных материалов при воздействии механических полей, в том числе при наличии отверстий и включений различной формы, а также межфазного слоя. Исследуется влияние на оптимальную топологию композиционного материала наличия двух входящих в конфронтацию критериев оптимальности.

На основе упругой и термической гомогенизации, рассмотренной в главе 1,

предоставляется возможность поставить задачу оптимизации, которая позволит определить оптимальную топологию для термоупругой задачи. Пусть M^e означает одну из механических величин: K^e – эффективный объемный модуль или G^e – эффективный модуль сдвига. Целевую функцию определим в виде

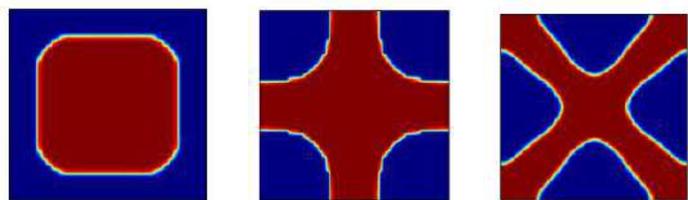
$$\min \left\{ (q-1) \left(\omega M^e / M_b + (1-\omega) \text{tr}(\mathbf{k}^e) / k_b \right) + q h_0 h_{\max} / A \int_Y |\nabla \rho(\mathbf{y})|^2 dY \right\}. \quad (6)$$

здесь ω – весовой коэффициент, учитывающий вклад от целевых функций упругого и теплового слагаемых, и M_b, k_b – заданные значения эффективного упругого модуля (модуля сдвига или объемного эффективного модуля) и коэффициента теплопроводности, используемые для нормировки. Второе слагаемое является функцией штрафа для исключения эффекта «шахматной доски» в процессе оптимизации, $h_{0Б}$ – первоначальный размер сетки и h_{\max} – текущий размер сетки. Величина $0 \leq q \leq 1$ – заданный коэффициент, позволяющий сбалансировать функцию цели и функцию штрафа друг с другом.

Параметрические ограничения для искусственно введенной плотности $\rho(x)$ выберем в виде $0 \leq \int_Y \rho(y) dY \leq \gamma A, 0 < \delta \leq \rho(x) \leq 1$. Здесь через A обозначен общий объем материала оптимизируемой области Y в элементарной периодической ячейке при $\rho(x)=1$ и γ обозначает долю материала с параметрами E_1, k_1 . Поскольку для получения численного решения жесткость не должна полностью исчезать, положим δ равной некоторой достаточно малой величине, чтобы избежать сингулярности начальной матрицы жесткости при оптимизации.

Рассмотрим элементарную ячейку, заполненную двумя конкурирующими материалами в соотношении 1:1 ($\gamma = 0,5$), то есть в одном материале модуль Юнга больше, чем во втором, а в другом материале коэффициент теплопроводности больше, чем в первом. Примем для первого материала $E_1 = 1, k_1 = 5$, для второго – $E_2 = 5, k_2 = 1$. Расчеты проводились методом конечных элементов при разбиении элементарной ячейки на 2500 элементов. Вначале решалась задача максимизации эффективного коэффициента теплопроводности, то есть весовой коэффициент в (6) $\omega = 0$. Далее на всех рисунках красный цвет означает первый материал, синий – второй материал. На рис. 5а показана полученная оптимальная топология для этой задачи.

Оптимальное значение $\text{tr}(\mathbf{k}^e) / 2 = 2,364$. При этом модуль сдвига и объемный модуль $G^e = 1,619$, $K^e = 2,428$. Для задачи максимизации объемного модуля ($\omega=1$) оптимальная топология показана на рис. 5б, оптимальное значение $K^e = 3,219$, значение $\text{tr}(\mathbf{k}^e) / 2 = 1,725$. Для модуля сдвига ($\omega=1$) оптимальная топология показана на рис. 5в. Оптимальное значение $G^e = 1,946$ и значение $\text{tr}(\mathbf{k}^e) = 1,633$.



а) Max $\text{tr}(\mathbf{k}^e)$ б) Max K^e в) Max G^e

Рис. 5. Оптимальные элементарной ячейки структуры композиционного материала

■ $E_1 = 1, k_1 = 5$ ■ $E_2 = 5, k_2 = 1$.

Как можно заметить из рис. 5, оптимальные микроструктуры для максимальной теплопроводности и механических модулей сильно отличаются друг от друга. При решении многокритериальных задач решение следует искать только среди элементов множества альтернатив, т. е. тех решений, где не существует другого решения, которое было бы предпочтительнее.

Рассмотрим элементарную ячейку композиционного материала, имеющего технологическое отверстие круглой формы радиуса 0,3. Оптимизируемая область ячейки заполнена двумя конкурирующими материалами в соотношении 1:1 с теми же параметрами.

В таблице 2 приведены полученные оптимальные микроструктуры композиционных материалов и значения эффективных модулей для композиционного материала с отверстиями

Таблица 2 – Оптимальные микроструктуры и эффективные модули для композиционного материала с отверстиями

ω	0	0,2	0,5	1
K^e	1,5281	1,5809	2,1414	2,5262
$tr(\mathbf{k}^e)$	1,9783	1,9382	1,8334	1,3070
G^e	1,2160	1,3434	1,5361	1,6338
$tr(\mathbf{k}^e)$	1,9783	1,8326	1,3626	1,2438

значения эффективных модулей для материала с отверстием круглой формы при различных значениях ω .

Микроструктура, оптимальная для K^e схожа по форме с микроструктурой, получаемой для ячейки без отверстия, а форма оптимальной структуры для значения $tr(\mathbf{k}^e)$ похожа на микроструктуру для композиционного материала без отверстия, но

сдвинута на 1/4 ячейки. Оптимальные топологии для ячейки с отверстием при изменении ω изменяются более плавно, чем при оптимизации однородной ячейки, изменение приоритетов в функции цели происходит без резкого перехода.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ:

1. Построены математические модели, алгоритмы и созданы программные комплексы для исследования напряженно-деформированного состояния пластин сложной формы, находящихся в температурном поле на основе пространственной теории упругости и деформационной теории пластичности. Выявлено, что наличие угловых точек для пластин сложной геометрии приводит к увеличению зон пластических деформаций, вырезы являются концентраторами напряжений в пластине, что влияет на ее несущую способность.

2. Предложены методы и алгоритмы проектирования топологически оптимальных на минимум или максимум отклика структуры при заданных ограничениях конструкций различных областей практического применения, состоящих из однокомпонентных и многокомпонентных материалов. Изучена проблема топологической оптимизации конструкций, состоящих из нескольких материалов, с использованием модифицированного метода интерполяции материалов на основе одной непрерывной переменной проектирования, приведены численные результаты. Установлено, что

предложенный метод может эффективно решить задачи топологической оптимизации для нескольких материалов без значительного увеличения вычислительных затрат, он может быть легко встроен в любой существующий алгоритм оптимизации, основанный на классических методах, и позволяет решить более сложные задачи структурной оптимизации.

3. Достоверность получаемых результатов подтверждается физическим и численным экспериментом для топологической оптимизации конструкции. Выявлено, что предложенный алгоритм позволяет увеличить запас прочности пластины за счет оптимальной конфигурации армирования в несколько раз по сравнению с обычной двухслойной пластиной.

4. Разработаны алгоритмы и программы для расчета эффективных характеристик композиционных материалов на основе метода гомогенизации. Достоверность алгоритма подтверждается совпадением полученных результатов и результатов других авторов. Получены результаты для композиционных материалов с включениями различных форм.

5. Созданы новые корректные математические модели, алгоритмы и комплексы программ для топологической оптимизации композиционных материалов с многофункциональными требованиями к эффективным характеристикам как для двухкомпонентной смеси, так и для композиционных материалов с порами или технологическими включениями, учтена возможность наличия межфазного слоя между матрицей и включением. Выявлено, что невозможно одновременно достичь наилучших показателей для обоих случаев в связи с противоречащими друг другу критериями в функции цели.

Положения и результаты диссертации изложены в 38 публикациях, основными из которых являются:

Публикации в журналах, включенных в список ВАК Минобрнауки России

1. Павлов С.П., Бекренев Н.В., Злобина И.В., Бодягина К.С. Оптимизация армирования элементов микромеханических приборов для геологических изысканий: компьютерное моделирование и эксперимент // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2018. Т. 329. № 3. С. 44-52.

2. Павлов С.П., Крысько В.А., Бодягина К.С. К вопросу об оптимизации формы геологических выработок и топологии их укрепления // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2017. Т. 328. № 1. С. 6-12.

3. Бодягина К.С., Павлов С.П. Топологическая оптимизация микроструктуры адгезивов при действии тепловых и механических нагрузок // Математика и математическое моделирование. 2019. № 2. С. 1-28.

4. Павлов С.П., Бодягина К.С. Топологическая оптимизация конструкций, состоящих из нескольких материалов, с использованием модифицированного метода SIMP // Математика и математическое моделирование. 2019. № 6. С. 19-34.

Охранные документы

5. Павлов С.П., Жигалов М.В., Пальков Р.С., Бодягина К.С. Программа оптимизации формы теплоприемника в замкнутом теплообменнике. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015611600, 02.02.2015. Заявка № 2014662557 от 04.12.2014.

6. Павлов С.П., Жигалов М.В., Пальков Р.С., Бодягина К.С. Программа оптимизации внутренней микроструктуры композиционных материалов. Свидетельство

о регистрации программы для ЭВМ RU 2015611619, 02.02.2015. Заявка № 2014662617 от 08.12.2014.

Публикации в других научных изданиях

7. **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Krysko V.A.** Mathematical modeling of planar physically nonlinear inhomogeneous plates with rectangular cuts in the three-dimensional formulation // *Acta Mechanica*. 2021. V. 232. № 12. P. 4933-4950. **(Q1)**

8. **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A.** On 3d and 1d mathematical modeling of physically nonlinear beams // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021. V. 134. P. 103734. **(Q1)**

9. **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A.** Mathematical modeling of physically nonlinear 3d beams and plates made of multimodulus materials // *Acta Mechanica*. 2021. V. 232. № 9. P. 3441-3469. **(Q1)**

10. **Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A.** Improving multi-material structures using topological optimization and the modified simp method // *Journal of Physics: Conference Series. The Fifth Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2020)*. 2021. P. 012001.

11. **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Krysko V.A., Bodyagina K.S., Makseev A., Zhigalov M.V.** Identifying inclusions in a non-uniform thermally conductive plate under external flows and internal heat sources using topological optimization // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2021. V. 27 № 9. P. 1649-1671. **(Q2)**

12. **Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Zhigalov M.V., Bodyagina K.S., Krysko V.A., Krysko A.V.** Decreasing shear stresses of the solder joints for mechanical and thermal loads by topological optimization // *Materials*. 2020. V. 13. № 8. P. 1862. **(Q2)**

13. **Krysko A.V., Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Bodyagina K.S., Krysko V.A.** Topological optimization of thermoelastic composites with maximized stiffness and heat transfer // *Composites Part B: Engineering*. 2019. V. 158. P. 319-327. **(Q1)**

14. **Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A.** Design of composite structures with extremal elastic properties in the presence of technological constraints // *Composite Structures*. 2017. V. 174. P. 19-25. **(Q1)**

15. **Krysko A.V., Pavlov S.P., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A., Awrejcewicz J.** Non-linear dynamics of size-dependent Euler–Bernoulli beams with topologically optimized microstructure and subjected to temperature field // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2018. V. 104. P. 75-86. **(Q1)**

Подписано в печать ДД.ММ.ГГ

Бум. офсет.

Тираж 100 экз.

Усл.-печ. л. 1,0

Заказ NN

Формат 60×84 1/16

Уч.-изд. л. 1,0

Бесплатно

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

410054, Саратов, Политехническая ул., 77

Отпечатано в издательстве СГТУ. 410054, Саратов, Политехническая

ул., 77 Тел.: 8 (8452) 99-87-39, e-mail: izdat@sstu.ru