

Калужский филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э. БАУМАНА**
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



ТАР ЯР МЬО

**АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЖЕЛАЕМОЙ
СПЕКТРАЛЬНОЙ ДИНАМИКОЙ**

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка
информации (промышленность)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук
Мышляев Ю. И.

Калуга — 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДВУХКАСКАДНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЖЕЛАЕМОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ДИНАМИКОЙ КОНЕЧНОГО КАСКАДА	11
1.1. Алгоритмы адаптивного управления с явной эталонной моделью конечного каскада	12
1.1.1. Постановка задачи синтеза	12
1.1.2. Методика синтеза.....	13
1.1.3. Основные результаты и анализ устойчивости замкнутой системы	19
1.1.4. Пример синтеза и результаты математического моделирования ..	21
1.2. Алгоритмы адаптивного управления с модифицированной эталонной моделью конечного каскада	29
1.2.1. Постановка задачи синтеза	29
1.2.2. Методика синтеза.....	30
1.2.3. Основные результаты и анализ устойчивости замкнутой системы	33
1.2.4. Пример синтеза и результаты математического моделирования ..	38
1.3. Алгоритмы управления с адаптацией параметров в конечной форме	42
1.3.1. Постановка задачи синтеза. Методика синтеза	42
1.3.2. Основные результаты	43
1.3.3. Пример синтеза и результаты математического моделирования с адаптацией в конечной форме	44
1.3.4. Сравнительный анализ с адаптациями алгоритмов управления в дифференциальной и конечной форме	47
1.4. Алгоритм настраиваемого скользящего режима с динамически изменяемым коэффициентом усиления и ЯЭМ конечного каскада	49
1.4.1. Постановка задачи синтеза. Методика синтеза	49
1.4.2. Основные результаты и анализ устойчивости замкнутой системы	50
1.4.3. Пример синтеза и результаты математического моделирования ..	54

1.5. Идентифицирующие свойства синтезированных алгоритмов адаптации	58
1.6. Сравнительный анализ алгоритмов адаптивного управления линейными двухкаскадными системами с желаемой спектральной динамикой конечного каскада	62
1.7. Выводы по главе 1	66
 ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНООСНЫМ ВИБРАЦИОННЫМ ГИРОСКОПОМ	68
2.1. Постановка задачи управления одноосным вибрационным гироскопом в условиях параметрической неопределенности	68
2.1.1. Физические основы функционирования развития одноосного вибрационного гироскопа	69
2.1.2. Классификация основных видов вибрационных гироскопов	71
2.1.3. Математическая модель одноосного вибрационного гироскопа...	76
2.1.4. Анализ влияния конструктивных параметров	81
2.1.5. Обзор методов адаптивного управления вибрационным гироскопом	82
2.1.6. Постановка задачи управления в режиме идентификации угловой скорости одноосного вибрационного гироскопа с учетом динамики привода	87
2.2. Синтез алгоритмов адаптивного управления с явной эталонной моделью механической подсистемы одноосного вибрационного гироскопа	90
2.2.1. Постановка задачи	90
2.2.2. Синтез алгоритмов управления	91
2.2.3. Идентифицирующие свойства алгоритмов адаптивного управления	97
2.2.4. Пример синтеза и результаты математического моделирования ..	98

2.3. Синтез алгоритмов адаптивного управления с модифицированной эталонной моделью механической подсистемы одноосного вибрационного гироскопа	107
2.3.1. Постановка задачи	107
2.3.2. Синтез алгоритмов управления	108
2.3.3. Идентифицирующие свойства алгоритмов адаптивного управления	115
2.3.4. Пример синтеза и результаты математического моделирования	116
2.3.5. Сравнительный анализ алгоритмов управления с ЯЭМ и МЭМ.	121
2.4. Синтез алгоритма настраиваемого скользящего режима для одноосного вибрационного гироскопа с динамически изменяемым коэффициентом усиления	124
2.4.1. Постановка задачи синтеза. Синтез алгоритма	124
2.4.2. Пример синтеза и результаты математического моделирования	126
2.5. Сравнительный анализ алгоритмов адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом.....	130
2.6. Выводы по главе 2.....	133
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	134
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	136
ПРИЛОЖЕНИЕ А. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ.....	148
А.1. Доказательство теоремы 2.1	148
А.2. Доказательство теоремы 2.2.....	152
А.3. Доказательство теоремы 2.3	156
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ	160

ВВЕДЕНИЕ

Одной из классических задач теорем управления является слежение по выходу динамического объекта за желаемым сигналом, заданным (или формируемым) в виде ограниченной, временной функции. Выбор метода синтеза во многом определяется классом модели объекта, наличием тех или иных возмущений. В работе рассматривается класс линейных двухкаскадных, стационарных, непрерывных, динамических объектов, функционирующих в условиях параметрической неопределённости. Целью управления является обеспечение точности и желаемой динамики слежения для траекторий конечного каскада и ограниченность траекторий замкнутой системы. Такая постановка задачи позволяет упростить контур управления, снизить порядок подсистемы адаптации и энергетические затраты на управление. Традиционно при решении задачи слежения адаптивным подходом используется эталонная модель желаемой динамики системы (или её подсистемы) с достаточным запасом устойчивости и задающим воздействием в виде желаемого сигнала слежения (Б.Н. Петров, В.Ю. Рутковский, А.Л. Фрадков, Ю.И. Мышляев, K.S. Narendra, P.V.Kokotovic, и др. [6, 12, 13, 18, 22 – 24, 34 – 37, 41 – 46, 69, 70, 76, 77, 89 – 92]). Использование динамической (инерционной) эталонной модели (ЭМ) приводит к динамическим ошибкам слежения (запаздыванию выхода замкнутой системы относительно желаемого (задающего) сигнала). Уменьшение запаздывания за счёт повышения запаса устойчивости ЭМ достигается за счёт возрастания модулей коэффициентов обратной связи, что приводит к повышению энергетических затрат на управление. Использование сингулярной (статической, неявной ЭМ (А.Л. Фрадков [18])) требует перехода задачи слежения к задаче стабилизации за конечный интервал времени. При этом алгоритмы адаптации не обладают идентифицирующими свойствами.

В диссертационной работе, наряду с методологией скоростного биградиента, используется идея возможности спектрального разложения желаемого

го сигнала (формирования его с помощью линейной генерирующей системы). Это позволяет за счет небольшого усложнения структуры алгоритма управления, без повышения порядка подсистемы адаптации повысить точность слежения за динамическим задающим воздействием по сравнению с традиционными алгоритмами адаптивного управления. При этом сохраняется возможность идентификации параметров, снижаются энергетические затраты на управление. Разработанный подход к синтезу алгоритмов адаптивного управления для задачи слежения с желаемым спектром задающего сигнала применён для решения важной прикладной задачи - повышения качества функционирования одноосного вибрационного гироскопа.

Актуальность темы в теоретической области основана на повышении точности слежения за задающим (желаемым) сигналом, возможности идентификации параметров, снижении энергетических затрат на управление в классе двухкаскадных линейных объектов, функционирующих в условиях параметрической неопределённости. В прикладной области – на повышении качества функционирования одноосного вибрационного гироскопа (желаемого вращения чувствительного элемента (ЧЭ)), точности идентификации параметров механической подсистемы и оценивания угловой скорости вращения основания гироскопа.

Объектом исследования в теоретической области является класс непрерывных, стационарных динамических объектов с неопределёнными параметрами; в прикладной области – одноосный вибрационный гироскоп.

Предметом исследования является применение метода скоростного биградиента и генерирующей модели желаемого задающего воздействия конечного каскада для синтеза алгоритмов адаптивного управления двухкаскадными линейными объектами, в частности, для повышения точности движения ЧЭ и оценки параметров и угловой скорости вращения основания одноосного виброгироскопа.

Целью диссертационной работы является повышение качества функционирования двухкаскадных динамических систем в условиях параметриче-

ской неопределённости. А именно: повышение точности слежения и обеспечение желаемой динамики сходимости вектора состояния конечного каскада к вектору состояния генерирующей модели заданного ограниченного задающего воздействия; повышение точности идентификации параметров; снижение энергетических затрат на управление; обеспечение ограниченности траекторий замкнутой системы. В частности, целью управления одноосным вибрационным гироскопом с учётом динамики приводов является: обеспечение заданной траектории высокочастотного вращения массы чувствительного элемента; возможность идентификации параметров механической подсистемы (выходного каскада)); и асимптотическое оценивание низкочастотной скорости вращения его основания. Траектории входного каскада (приводов) должны быть ограниченными. Другим важным показателем качества являются энергетические затраты на управление.

В диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

- разработка методики синтеза и синтез алгоритмов слежения для класса двухкаскадных линейных объектов с желаемой спектральной динамикой конечного каскада в условиях параметрической неопределённости;
- синтез алгоритмов управления одноосным вибрационным гироскопом и оценивания угловой скорости вращения основания в условиях параметрической неопределённости.

Выносимые на защиту результаты

- Методика синтеза и алгоритмы адаптивного управления для линейных двухкаскадных систем с желаемой спектральной динамикой конечного каскада с явной и модифицированной эталонной моделью скорости сходимости траекторий замкнутой системы к траектории генерирующей системы.
- Методика синтеза и алгоритмы адаптивного управления для линейных двухкаскадных систем с адаптацией в конечной форме.
- Результаты анализа идентифицирующих свойств синтезированных релейных, гладких, комбинированных алгоритмов адаптивного управления

с адаптацией параметров в дифференциальной и конечной форме.

- Алгоритм настраиваемого скользящего режима с общим динамическим коэффициентом усиления и явной эталонной моделью конечного каскада.
- Гладкие, релейные и комбинированные алгоритмы адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом с явной и модифицированной эталонной моделью сходимости для механической подсистемы.
- Релейный алгоритм управления вибрационным гироскопом с общим динамическим коэффициентом усиления.

Научная новизна диссертационной работы состоит: в постановке задачи слежения для двухкаскадных, линейных, стационарных объектов в условиях параметрической неопределённости с использованием генерирующей модели заданного ограниченного задающего воздействия; в разработанных методиках синтеза и семействах алгоритмов адаптивного управления, использующих явную и модифицированную эталонную модель желаемой скорости сходимости к траектории генерирующей модели, алгоритмы адаптации в дифференциальной и конечной формах, динамически изменяемые (для настраиваемого скользящего режима) коэффициенты усиления релейных элементов; в синтезированных (на основе разработанных методик) семейства алгоритмов адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом.

Отличие результатов работы от работ других авторов. В отличие от известных методов адаптивного управления, в данной работе для класса двухкаскадных линейных объектов используется идея генерации желаемой динамики конечного каскада с помощью линейной генерирующей модели по порядку и структуре совпадающей с моделью конечного каскада и реализующей желаемый (заданный), ограниченный задающий сигнал и его производные. Введение генерирующей модели приводит к существенной модификации используемого для синтеза метода скоростного биградиента и, как следствие к новому семейству алгоритмов управления. Впервые строго обоснованы алгоритмы скоростного биградиента с адаптацией параметров много-

образия скольжения в конечной (не дифференциальной) форме и алгоритмы настраиваемого скользящего режима с динамическими коэффициентами релейных элементов, исследованы их свойства. В задаче управления одноосным вибрационным гироскопом, в отличие от известных работ (J. Fei, C. Asar, S. Park, Ю. И. Мышляева, А. В. Финошина и др.), учтена динамика генераторов накачки (приводов), синтезированные алгоритмы обеспечивают гладкость сил, воздействующих на массу чувствительного элемента (ЧЭ), высокую точность отработки желаемых колебаний ЧЭ на плоскости и их производных, асимптотическую сходимость оцениваемых параметров механической подсистемы и скорости вращения основания к их истинным значениям.

Практическая ценность работы состоит в применимости разработанных методик синтеза и синтезированных алгоритмов при решении задач слежения для широкого класса технических систем, представимых двухкаскадными линейными моделями. Результаты диссертационной работы внедрены в учебный процесс на кафедре «Системы автоматического управления» КФ МГТУ имени Н.Э. Баумана.

Достоверность полученных результатов подтверждается применением аналитических методов исследования, доказательствами теорем и следствий, сформулированных для синтезированных алгоритмов управления, определяющих условия и качество достижения поставленных целей управления; результатами математического моделирования текстовых примеров и системы адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались на международном симпозиуме «ICUMT 2014 (the 6th IEEE International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops)» (Санкт–Петербург, 2014г), на XII всероссийском совещании по проблемам управления (ИПУ РАН, Москва, 2014г), на Региональных научно – технических конференциях «Наукоемкие технологии в приборостроении и машиностроении и развитие инновационной деятельности в

вузе» (Калуга, 2013г, 2014г), на международном конференции «Устойчивость и колебания линейных систем управления» (ИПУ РАН, Москва, 2016г).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 печатных работ, из них 5 статей в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в перечень ВАК и 2 статьи в IEEE Xplore, Scopus.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы из 117 наименований и приложения. Материал изложен на 160 страницах, представлен 130 рисунками и 6 таблицами.

ГЛАВА 1. АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДВУХКАСКАДНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЖЕЛАЕМОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ДИНАМИКОЙ КОНЕЧНОГО КАСКАДА

В главе 1 диссертационной работы для класса двухкаскадных, динамических, линейных объектов, в условиях параметрической неопределенности, рассматриваются решения задачи обеспечения ограниченности траекторий замкнутой системы и слежения выхода конечного каскада за желаемым сигналом, заданным в спектральной форме.

Эти решения объединены:

- общей методологией скоростного биградиента [22], которая позволяет синтезировать семейство релейных (настраиваемый скользящий режим (НСР)), гладких, комбинированных алгоритмов управления с настраиваемым многообразием скольжения;
- представлением желаемого сигнала для конечного каскада в виде выхода линейной генерирующей модели.

Эти решения отличаются:

- наличием явной [30] или модифицированной (с целью снижения затрат на управление и улучшения условий адаптируемости) модели желаемой скорости сходимости траекторий замкнутой системы к траекториям генерирующей модели;
- использованием алгоритмов адаптации параметров многообразия скольжения в дифференциальной или конечной (с целью повышения реализуемости алгоритмов) форме [29];
- использованием постоянного или динамически изменяемого (с целью снижения затрат на управление) общего коэффициента усиления в релейных алгоритмах с настраиваемым скользящим режимом.

В главе для различных решений приводятся (в каждом разделе): постановка задачи синтеза, поэтапное описание методики синтеза и алгоритмов

адаптивного управления. В форме теорем приведены результаты анализа условий работоспособности алгоритмов и качества достижения целей управления; и результаты моделирования тестовых примеров. В заключительном разделе главы приведены результаты сравнительного анализа синтезированных алгоритмов управления, в том числе наличия или отсутствия идентифицирующих свойств.

1.1. Алгоритмы адаптивного управления с явной эталонной моделью конечного каскада

В данном разделе рассматривается задача синтеза алгоритмов адаптивного управления с явной эталонной моделью (ЯЭМ), обеспечивающих ограниченность траекторий замкнутой системы и достижение заданной спектральной динамики конечного каскада.

1.1.1. Постановка задачи синтеза

Рассмотрим двухкаскадную модель линейного стационарного объекта управления (ОУ), состоящую из выходного каскада S_1 и входного каскада S_2 в регулярной форме

$$\begin{cases} S_1 : \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}x_2, \\ S_2 : \dot{x}_2 = \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}x_2 + bu, \\ y = (1 \ 0 \ \dots \ 0)\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^1$ — векторы состояния объекта и управления соответственно, $\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n-1} \\ -\alpha_0 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_{12} = (0 \ 0 \ \dots \ a_{12})^T$, $\mathbf{A}_{11}(\xi)$, $\mathbf{a}_{12}(\xi)$,

$\mathbf{a}_{21}(\xi)$, $a_{22}(\xi)$, $b(\xi)$ — постоянные матрицы при любом $\xi \in \Xi$ — множество допустимых параметров.

Предполагается, что $a_{12}(\xi) \neq 0$, $b(\xi) \neq 0$ и не меняют своих знаков $\forall \xi \in \Xi$; $\text{sign}(b)$, $\text{sign}(a_{12})$ — известны.

Формализуем цель управления (ЦУ) в форме целевого неравенства

$$|y(t) - f(t)| \leq \Delta, \quad \forall t \geq t_*, \quad (1.2)$$

где $f(t) \in R^m$ — ограниченная вместе с производными функция (желаемый выход), Δ — точность слежения. Требуется синтезировать адаптивную систему управления, обеспечив ограниченность траекторий системы, достижение цели управления (1.2).

1.1.2. Методика синтеза

Проведем синтез алгоритмов адаптивного управления методом скоростного биградиента (МСБГ) [22]. МСБГ включает в себя три этапа: на первом этапе синтезируется «идеальное» виртуальное управление выходным каскадом, обеспечивающее достижение ЦУ при полной априорной информации. На втором этапе заменяются неизвестные параметры в «идеальном» виртуальном управлении настраиваемыми, и синтезируется алгоритм адаптации в направлении антиградиента от скорости изменения целевого функционала по настраиваемым параметрам. На третьем этапе формируется многообразие пересечения в виде равенства нулю невязки между реальным входом выходного каскада и виртуальным управлением. Вводится дополнительный квадратичный функционал по отклонению траектории замкнутой системы от пересечения гиперповерхностей. Синтезируется управление в направлении антиградиента от скорости изменения дополнительного функционала по управлению, обеспечивающее достижение пересечения многообразий гиперповерхностей.

Первый этап синтеза. Синтез «идеального» виртуального управления, обеспечивающее достижение желаемой спектральной динамики.

В работе [23] для однокаскадных, динамических, линейных объектов, в условиях полной априорной информации о параметрах объекта представлена методика синтеза алгоритмов слежения по выходу за желаемым сигналом, заданным в спектральной форме и явной эталонной моделью скорости схо-

димости траекторий замкнутой системы к желаемой динамике. Используем этот подход для синтеза «идеального» виртуального управления.

Определение 1 [23]. Представление функции рядом вида

$$f(t) = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) = \sum_{i=1}^k \left(c_i e^{(\lambda_i + j\omega_i)t} + c_i^* e^{(\lambda_i - j\omega_i)t} \right), \quad (1.3)$$

где a_i, b_i — константы, $c_i = c_{i0} + jc_{i1}$, $c_i^* = c_{i0} - jc_{i1}$, $a_i = 2c_{i0}$, $b_i = -2c_{i1}$, $\lambda_i \leq 0$, $j^2 = -1$ назовём разложением по спектральным функциям, а достижение ЦУ (1.2) – задачей слежения с заданной спектральной динамикой.

Определение 2 [23]. Генерирующей моделью назовём систему, имеющую размерность и форму представления выходного каскада, и генерирующую на выходе сигнал вида (1.3). Представим $\lambda_i \pm j\omega_i$, $i = \overline{0, k}$ в качестве взаимно-простых корней характеристического уравнения.

$$\prod_{i=1}^{l_1} (s - \lambda_i) \prod_{m=1}^{l_2} (s - \lambda_m + j\omega_m)(s - \lambda_m - j\omega_m) = p(s) + q(s) = 0, \quad (1.4)$$

где $p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0$, $q(s) = s^{l-n} + q_{l-n-1}s^{l-n-1} + \dots + q_0$, p_i, q_i – константы, определяемые корнями характеристического уравнения; l_1 – количество вещественных корней, l_2 – количество пар комплексно-сопряжённых порядок $l = l_1 + 2l_2$ ($k \leq l \leq 2k$), $n < l$.

Тогда в соответствии с методикой, изложенной в работе [23], генерирующая модель имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_3 + \mathbf{b}_3 r, \quad y_3 = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \mathbf{x}_3, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{I}_{n-1} \\ -p_0 & \dots & -p_{n-1} \end{pmatrix}$, $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_3) = p(s)$, $\mathbf{b}_3 = (0 \ \dots \ 1)^T$, $\mathbf{x}_3(0)$ —

вектор начальных условий и r — скалярный вход генерирующей модели полностью определяются вторым многочленом сомножителем разложением (1.4). При этом обеспечивается равенство $y_3(t) = f(t)$. Заметим, что при $n = l$ в генерирующей модели (1.5) $r = 0$, при $n > l$, добавляет быстрое

устойчиво полюса так, что $l + \tilde{l}_1 = n$, где $\tilde{l}_1$ — количество добавленных полюсов.

Вводя модель ошибки $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_9$, усилим ЦУ (1.2), потребовав выполнения неравенства

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \Delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \text{ при } t \geq t_* \quad (1.6)$$

с желаемой динамикой стремления к нулю в форме явной эталонной модели

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_*, \quad (1.7)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_* \in R^n$, $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n-1} \\ -a_0^* & \dots & -a_{n-1}^* \end{pmatrix}$ — гурвицева матрица с заданными собственными числами; начальные условия положим равными нулю.

Введём ошибку слежения $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_*$. Потребуем достижения дополнительной ЦУ в виде условия

$$\|\mathbf{e}\| \leq \Delta_{\mathbf{e}}, \quad \Delta_{\mathbf{e}} > 0 \text{ при } t \geq t_*. \quad (1.8)$$

Введём $Q(\mathbf{e}) = 0,5\mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{e}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0$ — локальный (неинтегральный) целевой функционал. Очевидно, что из $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ следует выполнение ЦУ $\mathbf{e} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

«Идеальное» виртуальное управление имеет вид

$$x_{2*}^{virt} = \mathbf{k}_x^* \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_9^* \mathbf{x}_9 + k_r^* r = \mathbf{k}_x^* \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_9^* \boldsymbol{\varphi} + k_r^* r, \quad (1.9)$$

где $\boldsymbol{\varphi} \triangleq \left(f(t) f'_t(t) \dots f_t^{(n-1)}(t) \right)^T = \mathbf{x}_9(t)$ — аналитическое решение генерирующей модели (1.5), матрицы и коэффициент алгоритма управления, удовлетворяющие условиям:

$$\mathbf{a}_{12} \mathbf{k}_x^* = \mathbf{A}_* - \mathbf{A}_{11}, \quad \mathbf{a}_{12} \mathbf{k}_9^* = \mathbf{A}_9 - \mathbf{A}_*, \quad \mathbf{a}_{12} k_r^* = \mathbf{b}_9.$$

При этом, в условиях полной априорной информации о параметрах выходного каскада, выполняется неравенство $\dot{Q}(\mathbf{e}) \leq -\rho Q(\mathbf{e})$,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0: \mathbf{H} \mathbf{A}_* + \mathbf{A}_*^T \mathbf{H} = -\mathbf{G}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0, \quad \rho = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{G})}{\lambda_{\max}(\mathbf{H})} > 0, \quad \lambda_{\min}(\mathbf{G}),$$

$\lambda_{\max}(\mathbf{H})$ — минимальное и максимальное собственные числа матриц.

Структурная схема конечного каскада, замкнутого «идеальным» виртуальным управлением (при виртуальном выполнении $x_2 = x_2^{virt}$) приведена на рис. 1.1.

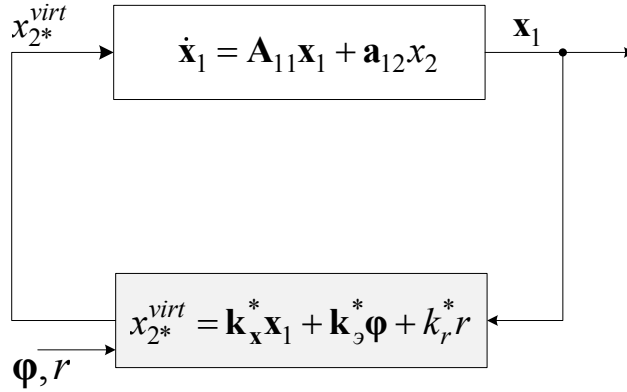


Рис. 1.1. Выходной каскад с «идеальным» виртуальным управлением

Второй этап синтеза. Заменяем в «идеальном» виртуальном управлении (1.9) неизвестные параметры k_x^* , k_r^* настраиваемыми k_x , k_r и получим адаптивное виртуальное управление вида

$$x_2^{virt} = k_x x_1 + k_\varphi \varphi + k_r r. \quad (1.10)$$

Вычисляя градиенты от скорости изменения целевого функционала $\dot{Q}(\epsilon)$ по настраиваемым параметрам k_x , k_r и выбирая алгоритм адаптации скоростного биградиента в дифференциальной форме, получаем

$$\begin{aligned} \dot{k}_x &= -a_{12}^T \mathbf{H} \epsilon x_1^T \Gamma_1 = -sign(a_{12}) \cdot \mathbf{h}_n(x_1 - \varphi(t)) x_1^T \Gamma_1, \\ \dot{k}_r &= -\gamma_2 a_{12}^T \mathbf{H} \epsilon r = -sign(a_{12}) \cdot \gamma_2 \mathbf{h}_n(x_1 - \varphi(t)) r, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$, $\gamma_2 > 0$ — матрицы коэффициентов усиления, $\mathbf{h}_n$ — n -ая строка матрицы $\mathbf{H}$.

Структурная схема конечного каскада с адаптивным виртуальным управлением (при виртуальном выполнении $x_2 = x_2^{virt}$) представлена на рис. 1.2.

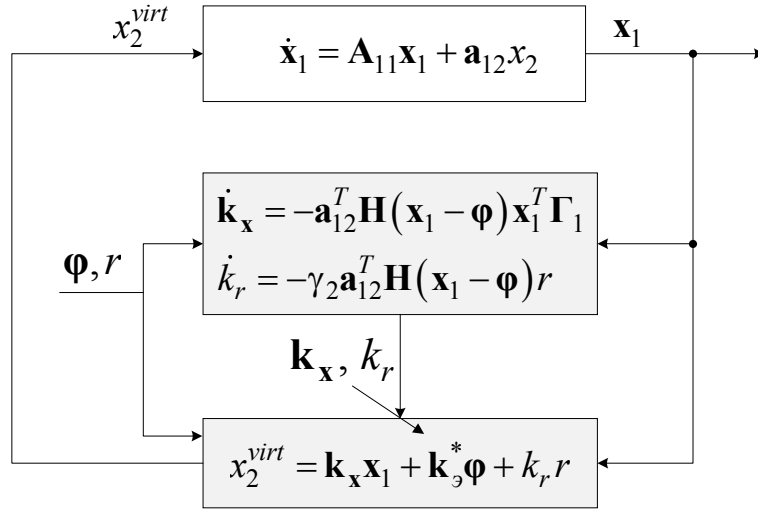


Рис. 1.2. Конечный каскад с адаптивным виртуальным управлением

Третий этап синтеза. формируется отклонение от пересечения многообразий в виде равенства нулю ($\sigma \equiv 0$) в форме невязки между входом выходного каскада x_2 и виртуальным адаптивным управлением x_2^{virt} так, что

$$\sigma = x_2 - x_2^{virt}. \quad (1.12)$$

Для решения задачи синтеза сформируем дополнительное целевое неравенство

$$R(\sigma) \leq \Delta_\sigma, \text{ при } t \geq t^*, \quad (1.13)$$

где $R(\sigma) = 0,5\sigma^2$ – целевой функционал, $0 < \Delta_\sigma < \Delta_\varepsilon$, $t^* < t_*$.

Вычислим скорость изменения целевой функции $R(\sigma)$ с учётом контура адаптации (1.11)

$$\begin{aligned} \mu(\sigma, u) &\equiv \dot{R}(\sigma) = \sigma(\dot{x}_2 - \dot{x}_2^{virt}) = \\ &= \sigma(\mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}x_2 + \text{sign}(a_{12}) \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{x}_1^T \Gamma_1 \mathbf{x}_1 + bu - \\ &\quad - \mathbf{k}_x(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}x_2) - \mathbf{k}_\varphi^* \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \text{sign}(a_{12}) \cdot \gamma_2 \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) r^2 - k_r \dot{r}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Зададим алгоритм управления в виде семейства [20, 46]

$$u = u_0 - \gamma_m \psi(\sigma), \quad (1.15)$$

где u_0 — начальное (априорно заданное) управление (может быть равно нулю), функция $\psi(\sigma)$ выбирается из условия усиленной псевдоградиентности:

$$\psi(\sigma) \nabla_u \mu(\sigma, u) \geq \beta |\nabla_u \mu(\sigma, u)|^\delta,$$

где $\nabla_u \mu(\sigma, u) = b \cdot \sigma$ — градиент $\nabla_u \mu(\sigma, u)$ по управлению u , $\beta > 0, \delta = 1, 2, \dots$ — некоторые числа. Условию усиленной псевдоградиентности удовлетворяют, например, функции вида

$$\psi(\sigma) = \gamma_m \text{sign}(\nabla_u \mu(\sigma, u)), \text{ при } \delta = 1, \beta = \frac{\lambda_{\min}(\gamma_m)}{\sqrt{2}},$$

$$\psi(\sigma) = \gamma_m \nabla_u \mu(\sigma, u), \text{ при } \delta = 2, \beta = \lambda_{\min}(\gamma_m),$$

где $\gamma_m > 0$; $\lambda_{\min}(\gamma_m)$ — минимальное собственное число γ_m .

При $u_0 = 0$ в семейство алгоритмов (1.15) получаем релейный и гладкий алгоритмы управления вида

$$u = -\gamma_m \text{sign}(\nabla_u \mu(\sigma, u)) = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \text{sign}(\sigma), \quad (1.16)$$

$$u = -\gamma_m \nabla_u \mu(\sigma, u) = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \sigma. \quad (1.17)$$

Заметим, что релейный алгоритм ($\delta = 1$) относится к классу систем с настраиваемым скользящим режимом [24, 87].

Структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 1.3.

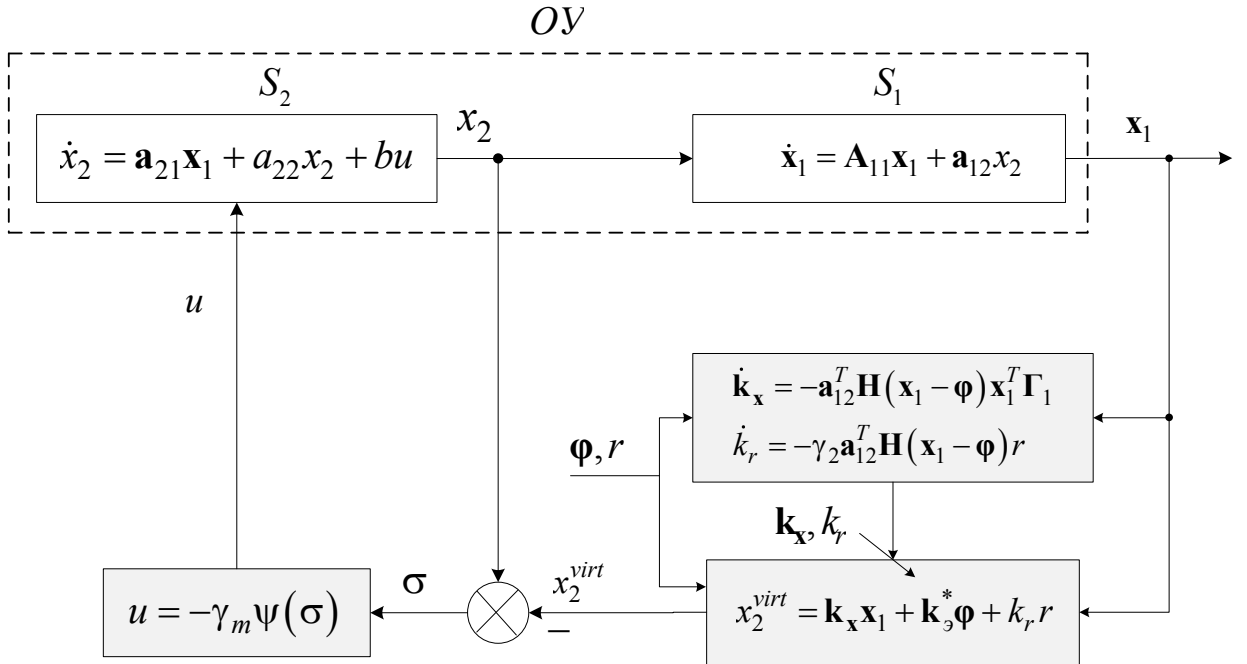


Рис. 1.3. Замкнутая адаптивная система управления

1.1.3. Основные результаты и анализ устойчивости замкнутой системы

Сформулируем основной результат синтеза в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1.. Для системы (1.1), (1.5), (1.7), (1.10), (1.11), (1.12) с алгоритмами управления (1.16) или (1.17), соответственно, справедливы утверждения:

1. Для релейного алгоритма управления (1.16) существует $\tilde{\gamma}_m > 0$ такое, что при $\gamma_m > \tilde{\gamma}_m$ цели управления (1.6), (1.8), (1.13) достигаются при любых $\Delta_\varepsilon > 0$, $\Delta_e > 0$, $\Delta_\sigma > 0$, все траектории замкнутой системы ограничены, $Q(e) + R(\sigma) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow 0$, $e \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_1 \rightarrow x_s = \Phi(t)$. Существует момент времени t^* , такой, что $R(\sigma) \equiv 0$ ($\sigma \equiv 0$) при $t \geq t^*$.

2. Для гладкого алгоритма управления (1.17) для любого $\Delta = \min\{\Delta_\varepsilon, \Delta_e, \Delta_\sigma\} > 0$ существуют $\bar{\gamma}_m(\Delta) > 0$ такое, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_m$ цели управления (1.6), (1.8), (1.13) достигаются, все траектории замкнутой системы ограничены. При $\gamma_m \rightarrow \infty$ справедливо: $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(e) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3. Для замкнутой системы с семейством алгоритмов управления существует функция Ляпунова вида

$$V(e, \sigma, \theta) = Q(e) + R(\sigma) + 0,5 \cdot \left\{ (k_x - k_x^*) \Gamma_1^{-1} (k_x - k_x^*)^T + \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 \right\}, \quad (1.18)$$

где $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$, $\gamma_2 > 0$.

Доказательство теоремы 1.1. Представим модель конечного каскада (1.1) с учётом отклонения (1.12) в форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + a_{12} \left(x_2^{virt} + \sigma \right), \quad y = (1 \ 0 \dots 0)x_1, \\ \dot{\sigma} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + bu - \dot{x}_2^{virt}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Определим производные по времени от слагаемых правой части функции Ляпунова (1.18).

а) Определим производную от функции $Q(\mathbf{e})$ с учетом виртуальных управлений (1.10), (1.11) и выходной подсистемы системы (1.19).

$$\begin{aligned}\dot{Q}(\mathbf{e}) &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} \left(x_2^{virt} + \sigma \right) - \mathbf{A}_9 \mathbf{x}_9 - \mathbf{b}_9 r - \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_* \pm \mathbf{A}_* \mathbf{e} \right) = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{A}_* \mathbf{e} + \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} \left(x_2^{virt} + \sigma \right) - \mathbf{A}_9 \mathbf{x}_9 - \mathbf{b}_9 r - \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_* \right) = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_* \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left((\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_*) \mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_* - \mathbf{A}_9) \mathbf{x}_9 + \mathbf{a}_{12} \left(x_2^{virt} \pm x_{2*}^{virt} \right) - \mathbf{b}_9 r \right) \leq \\ &\leq -\rho Q + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{a}_{12} \left((\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \mathbf{x}_1 + (k_r - k_r^*) r + \sigma \right).\end{aligned}$$

б). Производная от 2-го слагаемого с учётом второй подсистемы системы (1.19), контура адаптации (1.11) имеет вид (1.14).

в). Определим производную от последних слагаемых

$$\begin{aligned}&\left(0,5 \left\{ (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)^T + \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 \right\} \right)' = \\ &= (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} \dot{\mathbf{k}}_x^T + \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*) \dot{k}_r.\end{aligned}$$

Производная от правой части равенства (1.18), с учётом алгоритма адаптации (1.11) и управления (1.16) представима в форме

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\rho Q + \sigma \cdot (\chi + bu) = \\ &= -\rho Q + \sigma \cdot (\chi - \gamma_m |b| \text{sign}(\sigma)) \leq \\ &\leq -\rho Q - \gamma_0 |\sigma| = -\rho Q(e) - \gamma_0 \sqrt{2} \cdot \sqrt{R(\sigma)},\end{aligned}\tag{1.20}$$

где $\chi = \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_1 + a_{22} x_2 + \text{sign}(a_{12}) \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{x}_1^T \Gamma_1 \mathbf{x}_1 +$

$+ \text{sign}(a_{12}) \cdot \gamma_2 \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) r^2 - k_r \dot{r} + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{a}_{12} - \mathbf{k}_x (\mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} x_2) - \mathbf{k}_9^* \dot{\boldsymbol{\varphi}},$

$$\gamma_m \geq \tilde{\gamma}_m = \frac{|\chi|}{|b|} + \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_0 > 0.$$

Из положительной определённости функции $V(\mathbf{e}, \sigma, \boldsymbol{\theta})$, $\rho > 0$, $\tilde{\gamma}_0 > 0$ вытекает конечность интеграла по времени на интервале $t \in [0, \infty)$ от правой части равенства (1.20). И, в силу выполнения условий леммы Барбалата [20], переменные $\mathbf{e}, \sigma, \boldsymbol{\theta}$ ограничены и выполняется $Q(\mathbf{e}) + R(\sigma) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $\sigma \rightarrow 0$, $\mathbf{e} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_* \rightarrow 0$ и, в силу гурвицевости эталонной

модели (1.7), $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$. Для доказательства конечного времени t^* достижения многообразия $\sigma \equiv 0$ достаточно рассмотреть устойчивость системы (1.19) по части переменных состояния σ и убедиться в выполнении неравенства $\dot{R}(\sigma) \leq -\tilde{\gamma}_0 \sqrt{2} \cdot \sqrt{R(\sigma)}$. Откуда, интегрируя, принимая во внимание $R(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$ и $R(0) = 0$, получаем оценку $t^* \leq 2R(0)/\sqrt{2\tilde{\gamma}_0}$.

При использовании гладкого алгоритма (1.17) неравенство (1.20) имеет вид

$$\dot{V} \leq -\rho Q + \sigma \cdot (\chi - |b| \gamma_m \sigma) \leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \tilde{\rho} R(\sigma) + |\sigma| \cdot |\chi| - (\gamma_m |b| - 0,5\tilde{\rho}) \cdot \sigma^2.$$

Максимизируя сумму последних двух слагаемых по $|\sigma|$ получаем

$$\max_{|\sigma|} (|\sigma| \cdot |\chi| - (\gamma_m |b| - 0,5\tilde{\rho}) \sigma^2) : |\chi| - 2(\gamma_m |b| - 0,5\tilde{\rho}) |\sigma| = 0 \Leftrightarrow |\sigma| = \frac{|\chi|}{2|\gamma_m |b| - 0,5\tilde{\rho}}.$$

Очевидно, что для любого $\Delta > 0 : |\sigma| \leq \Delta \leq \sqrt{2\Delta_\sigma}$ выбирая $\gamma_m \geq \bar{\gamma}_m(\Delta) = \frac{|\chi|}{2|b|\Delta} + \frac{\tilde{\rho}}{4|b|} > 0$ можно обеспечить выполнение целевого неравенства (1.13). Тогда $\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \tilde{\rho} R(\Delta)$ и из ограниченности $|\sigma|$ и ограниченности $\Phi(t)$ будет следовать ограниченность всех траекторий замкнутой системы и достижение целевого неравенства (1.6).

Следует отметить, что управление гладкого алгоритма обладает слабыми робастными свойствами сходимости и идентификации, поэтому его целесообразнее использовать в комбинации с управлением релейного алгоритма

$$u = -\text{sign}(b)(\gamma_{m1} \text{sign}(\sigma) + \gamma_{m2}(\sigma)), \quad \gamma_{mi} > 0. \quad (1.21)$$

1.1.4. Пример синтеза и результаты математического моделирования

Пример 1.1. Пусть двухкаскадная система имеет следующий структурную схему (рис. 1.4)

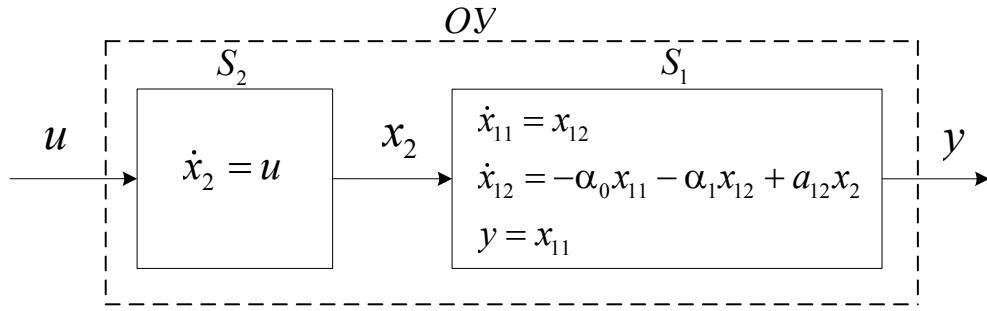


Рис. 1.4. Структурная схема объекта

и описывается системой уравнений

$$\begin{cases} S_1: \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_{12} = -\alpha_0 x_{11} - \alpha_1 x_{12} + a_{12} x_2, \\ S_2: \dot{x}_2 = u, \\ y = x_{11}, \quad x_{11}(0) = 0,5, \quad x_{12}(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, a_{12}$ — неизвестные постоянные параметры.

Пусть желаемый выход задан в виде: $f(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t$ с параметрами $a_0 = 0.3, a_1 = 0.5, a_2 = 0.6, \omega = 1$. Целью управления является достижение неравенства (1.2).

В работе [23] как показано, что генерирующая модель в форме (1.5) для системы 2-го порядка) имеет матрицы вида $\mathbf{A}_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $p_0 = \omega^2, p_1 = 0$.

Собственные числа матрицы $\mathbf{A}_g$ являются мнимыми, равными $\pm j\omega$, и совместно с начальными условиями $x_{g1}(0) = a_0 + a_2, x_{g2}(0) = a_1\omega$ формируют собственное движение генерирующей модели, соответствующее второму и третьему слагаемым в представлении $f(t)$. Скалярный вход генерирующей модели $r = a_0\omega^2$ порождает вынужденное движение в виде a_0 .

Сформируем матрицу эталонной модели (1.7) в виде $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* \end{pmatrix}$,

параметры выберем исходя из желаемого расположения полюсов замкнутой

системы $\lambda_1^* = -2$, $\lambda_2^* = -2$ так, что $s^2 - a_1^*s - a_0^* = (s - \gamma_1^*)(s - \lambda_2^*)$ — характеристическое уравнение эталонной модели. Получаем $a_0^* = 4$, $a_1^* = 4$, начальные условия положим равными нулю.

Выбирая $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, получаем $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгоритм виртуального управления имеет форму (1.9) с идеальными параметрами $k_{x_1}^* = \frac{\alpha_0 - a_0^*}{a_{12}}$, $k_{x_2}^* = \frac{\alpha_1 - a_1^*}{a_{12}}$, $k_{x_3}^* = \frac{a_0^* - p_0}{a_{12}}$, $k_{x_2}^* = \frac{a_1^* - p_1}{a_{12}}$, $k_r^* = \frac{1}{a_{12}}$, $\mathbf{k}_x^* = \begin{pmatrix} k_{x_1}^* & k_{x_2}^* \end{pmatrix}$, $\mathbf{k}_3^* = \begin{pmatrix} k_{x_3}^* & k_{x_2}^* \end{pmatrix}$ и настраиваемыми параметрами $\mathbf{k}_x$, k_r согласно алгоритмам

$$\dot{k}_{x_1} = -\gamma_1 \delta x_1, \quad \dot{k}_{x_2} = -\gamma_1 \delta x_2, \quad \dot{k}_r = -\gamma_2 \delta r,$$

где $\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = x_{11} - f$, $\varepsilon_2 = x_{12} - f'$.

Алгоритм управления имеет вид (1.16) или (1.17).

Результаты математического моделирования системы с алгоритмом релейного управления (1.16) при $\gamma_m = 20$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $a_{12} = 1$, $\gamma_1 = 7$, $\gamma_2 = 15$ и с начальными условиями $k_{x_1}(0) = -4.5$, $k_{x_2}(0) = -2.5$, $k_r(0) = 0.2$ приведены на рис. 1.5 – рис. 1.12.

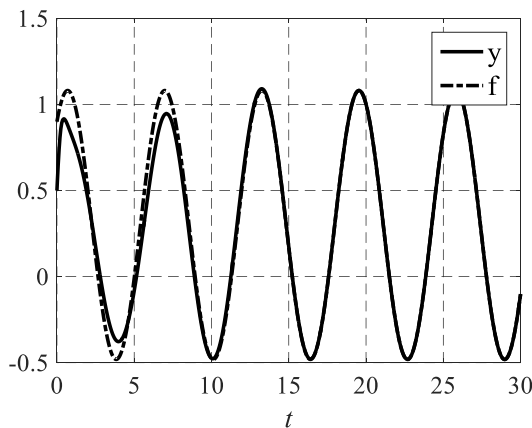


Рис. 1.5. Траектории объекта управления и вектора функции Φ

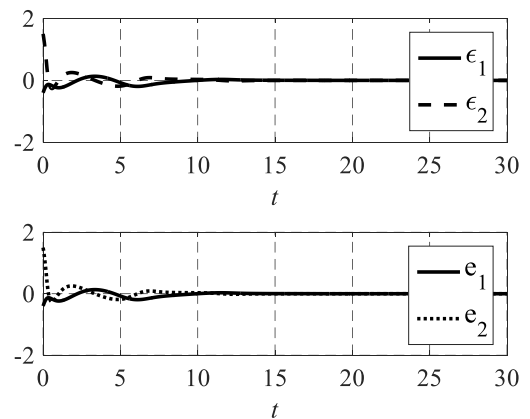


Рис. 1.6. Ошибки слежения

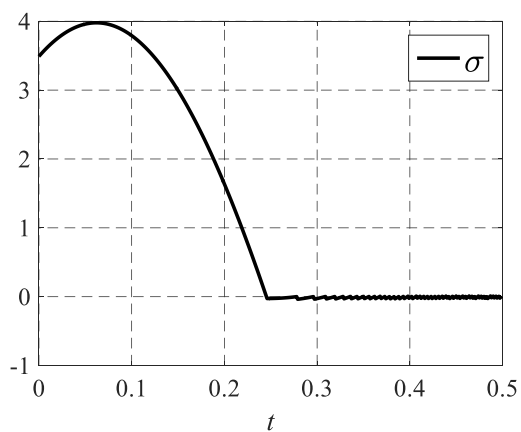


Рис. 1.7. Отклонения от пересечения многообразий

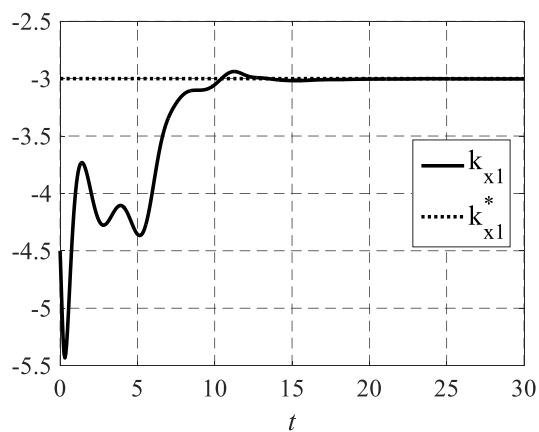


Рис. 1.10. Результаты настраиваемых k_{x1} и идеальных k_{x1}^* параметров

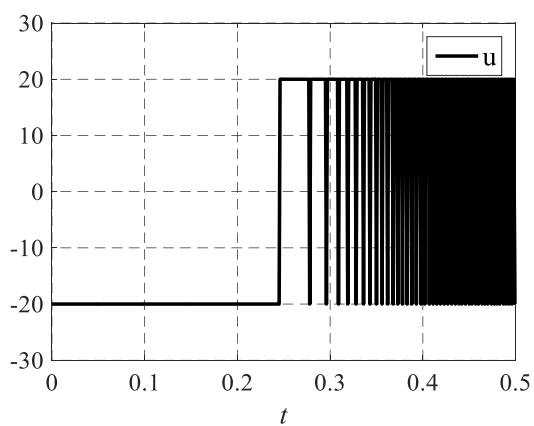


Рис. 1.8. График управления

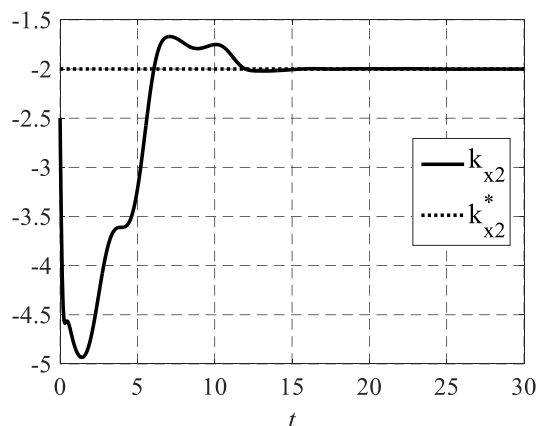


Рис. 1.11. Результаты настраиваемых k_{x2} и идеальных k_{x2}^* параметров

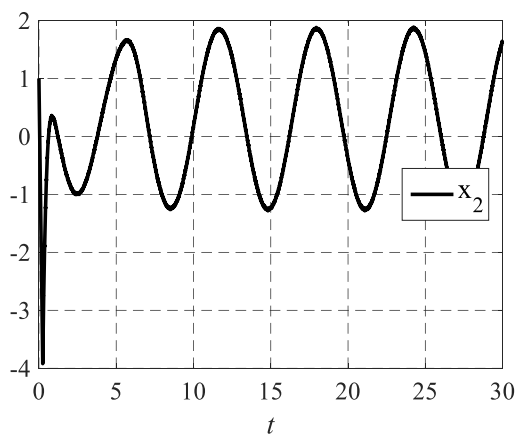


Рис. 1.9. Вход выходного каскада

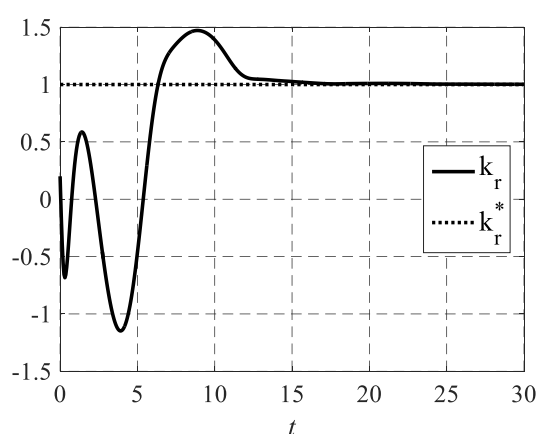


Рис. 1.12. Результаты настраиваемых k_r и идеальных k_r^* параметров

Релейный алгоритм адаптивного управления (настраиваемый скользящий режим) обеспечивает асимптотическое стремление ошибок к нулю при конечном коэффициенте усиления при релейных элементах по каналам управления.

Результаты математического моделирования системы с алгоритмом гладкого управления (1.17) при $\gamma_m = 100$ приведены на рис. 1.13 – рис. 1.20.

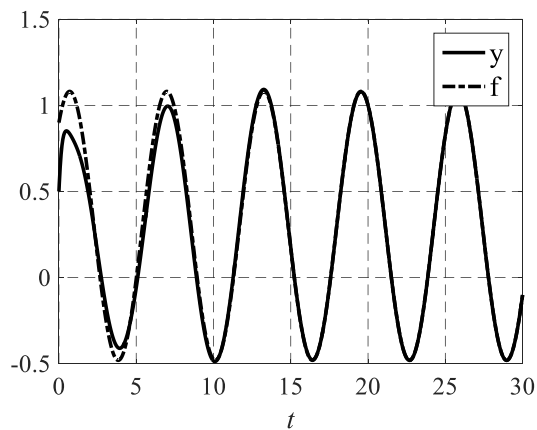


Рис. 1.13. Траектории объекта управления и вектора функции φ

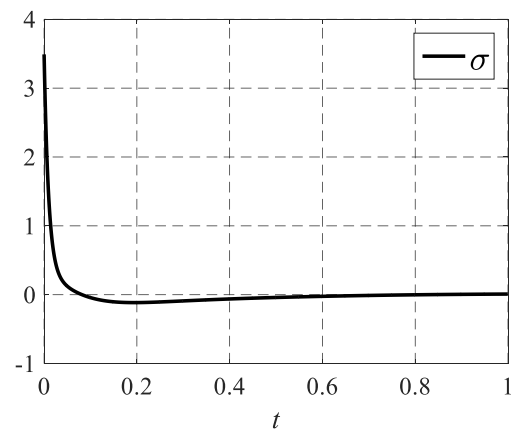


Рис. 1.15. Отклонения от пересечения многообразий

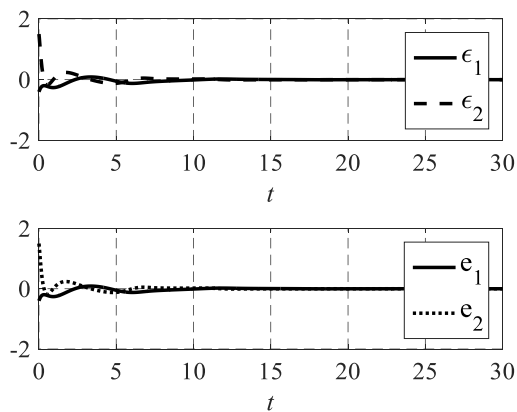


Рис. 1.14. Ошибки слежения

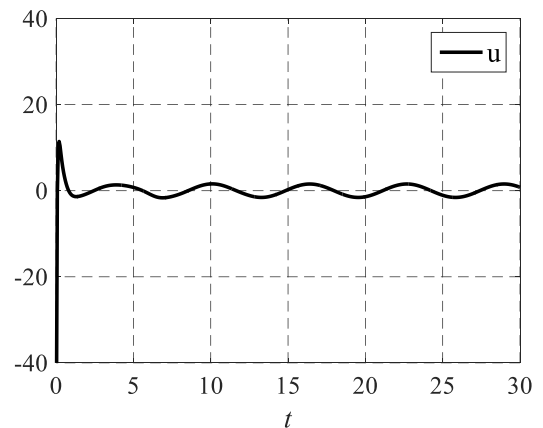


Рис. 1.16. График управления

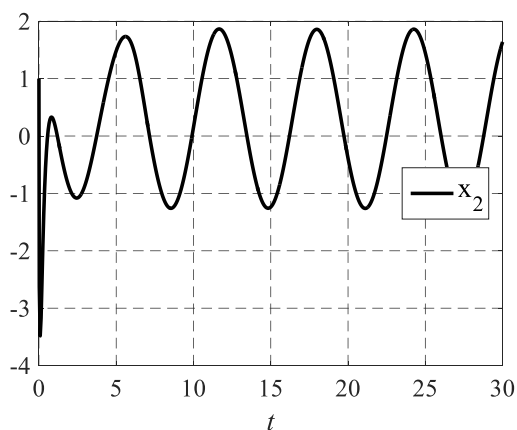


Рис. 1.17. Вход выходного каскада

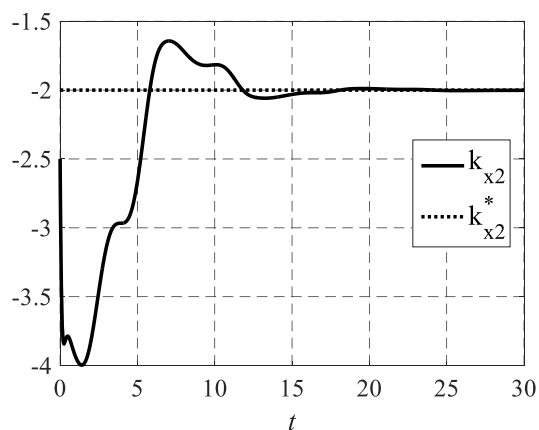


Рис. 1.19. Результаты настраиваемых k_{x_2} и идеальных $k_{x_2}^*$ параметров

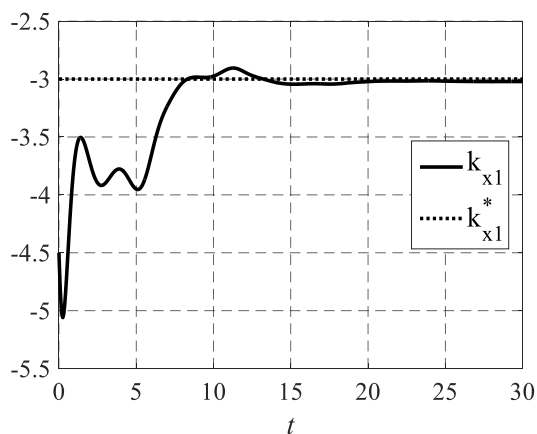


Рис. 1.18. Результаты настраиваемых k_{x_1} и идеальных $k_{x_1}^*$ параметров

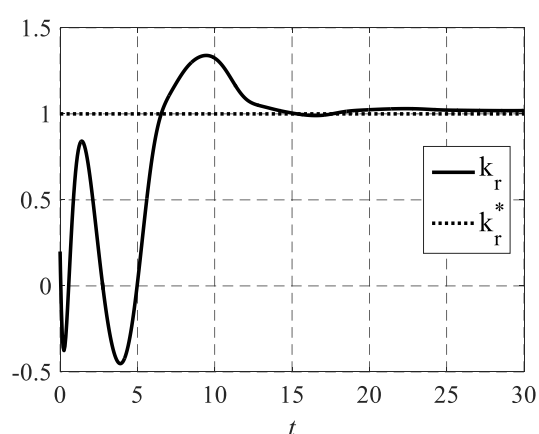


Рис. 1.20. Результаты настраиваемых k_r и идеальных k_r^* параметров

Гладкий алгоритм адаптивного управления обеспечивает сколь угодно высокую точность по ошибке слежения за желаемой траекторией чувствительного элемента и предельное асимптотическое стремление к нулю при бесконечно большом коэффициенте усиления по каналу управления ($\gamma_m \rightarrow \infty$).

В основе синтеза гладкого и релейного алгоритма лежит единая функция Ляпунова. Поэтому алгоритмы легко комбинируются в виде их суммы или системы переменной структуры.

Результаты математического моделирования системы с алгоритмом комбинированного управления (1.21) при $\gamma_{m1}=10$, $\gamma_{m2}=15$ приведены на рис. 1.21 – рис. 1.28.

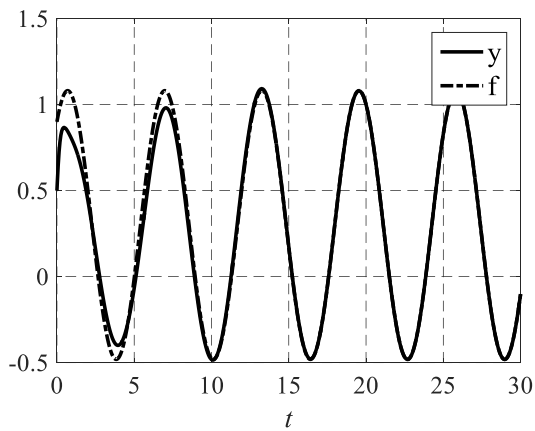


Рис. 1.21. Траектории объекта управления и вектора функции Φ

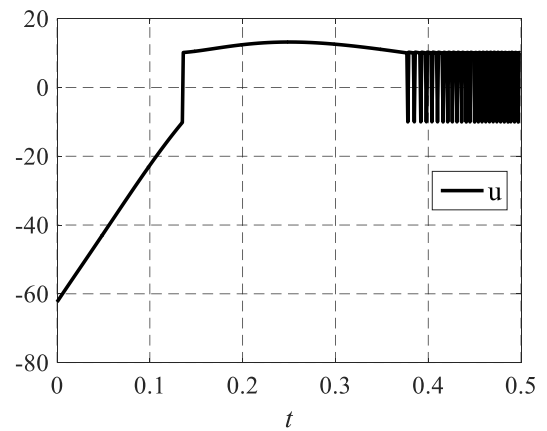


Рис. 1.24. График управления

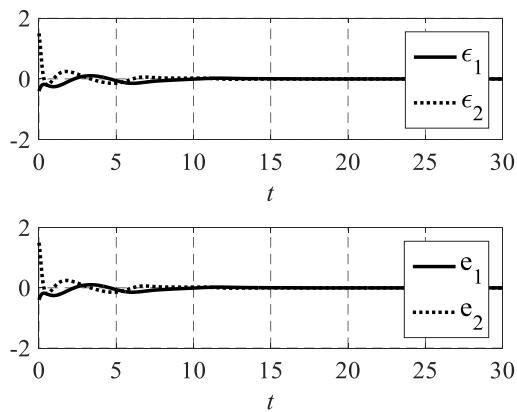


Рис. 1.22. Ошибки слежения

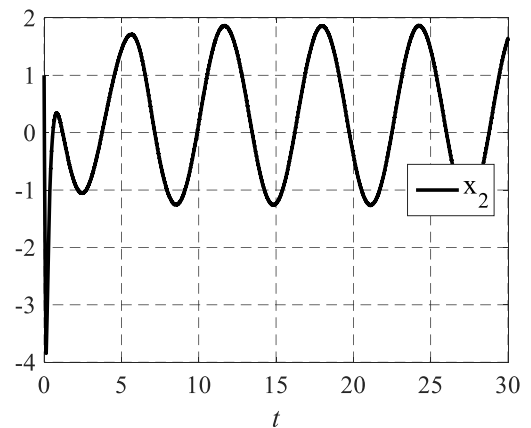


Рис. 1.25. Вход выходного каскада

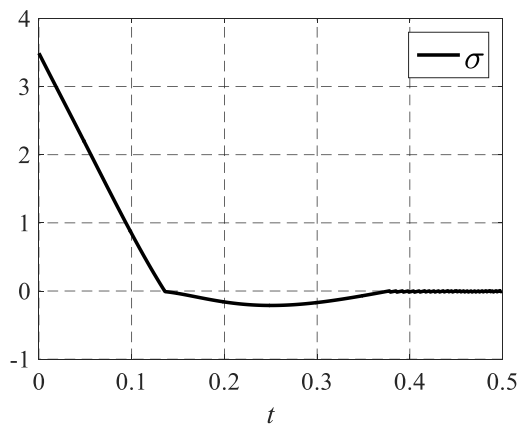


Рис. 1.23. Отклонения от пересечения многообразий

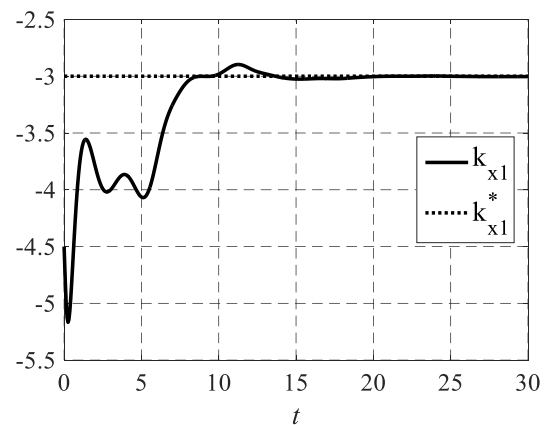


Рис. 1.26. Результаты настраиваемых k_{x1} и идеальных k_{x1}^* параметров

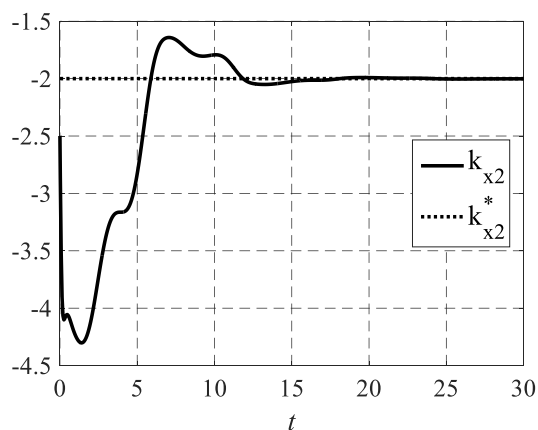


Рис. 1.27. Результаты настраиваемых k_{x_2} и идеальных $k_{x_2}^*$ параметров

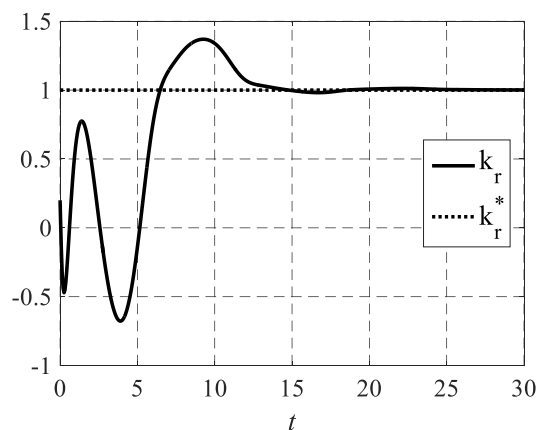


Рис. 1.28. Результаты настраиваемых k_r и идеальных k_r^* параметров

Результаты моделирования подтверждают, что алгоритм управления обеспечивает асимптотическую сходимость состояния выходного каскада к желаемой выходной динамике, алгоритм адаптации обладает идентифицирующими свойствами, в замкнутой системе за конечный интервал времени возникает настраиваемый скользящий режим.

1.2. Алгоритмы адаптивного управления с модифицированной эталонной моделью конечного каскада

В данном разделе рассматривается задача синтеза алгоритмов адаптивного управления класса скоростного биградиента с заданной (желаемой) динамикой конечного каскада с модифицированной эталонной моделью (МЭМ) скорости сходимости траектории конечного каскада к желаемой траектории генерирующей модели. Целью модификации является улучшение идентифицирующих свойств и снижение энергетических затрат на управления за счёт улучшения структурного соответствия модели ошибки и модифицированной эталонной модели не только на многообразии пересечений гиперповерхностей (невязка тождественно равна нулю), но и при движении вне этого многообразия.

1.2.1. Постановка задачи синтеза

Вновь рассмотрим линейный стационарный объект управления, приведенный к регулярной форме (1.1) и цель управления (1.2). Модель генерирующей системы задана в форме (1.5).

Определение 3. Введем **модифицированную эталонную модель** конечного каскада S_1 вида

$$\dot{\mathbf{\epsilon}}_* = \mathbf{A}_* \mathbf{\epsilon}_* + \mathbf{b}_\sigma \sigma, \quad (1.22)$$

где матрица $\mathbf{A}_*$ имеет такую же структуру, что и в модели (1.7),

$\mathbf{b}_\sigma = (0 \quad \dots \quad 0 \quad b_\sigma)^T$, b_σ — оценка параметра $a_{12}(\xi)$ так, что $b_\sigma^* = a_{12}(\xi)$, σ — отклонение от пересечения многообразий гиперповерхностей (1.12); начальные условия положим равными нулю.

Введём ошибку слежения $\mathbf{e} = \mathbf{\epsilon} - \mathbf{\epsilon}_*$, где $\mathbf{\epsilon} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ — модель ошибки (между объектом (1.1) и генерирующей моделью (1.5)). Потребуем достижения $\mathbf{\epsilon}$ с динамикой, заданной модифицированной эталонной моделью (1.22), таким образом, чтобы выполнялось условие (1.8)

$$\|\mathbf{e}\| \leq \Delta_e, \Delta_e > 0 \text{ при } t \geq t_*.$$

Замечание 1.1. При ограниченности σ , b_σ ($|\sigma| \leq C_1$, $b_\sigma \leq C_2$), в силу BIBO устойчивости (по входу–выходу) модифицированной модели (1.22), следует, что $\|\mathbf{\varepsilon}_*\| \leq \Delta_{\varepsilon_*}$ при $t \geq t_*$ и некотором $\Delta_{\varepsilon_*}(C_1, C_2) > 0$. Из неравенства треугольника имеем $\|\mathbf{\varepsilon}\| \leq \|\mathbf{e}\| + \|\mathbf{\varepsilon}_*\|$ и следовательно, $\|\mathbf{\varepsilon}\| \leq \|\mathbf{e}\| + \|\mathbf{\varepsilon}_*\| \leq \Delta_e + \Delta_{\varepsilon_*}$ при $t \geq t_*$. Условие (1.6) выполняется, если $\Delta_{e_i} + \Delta_{\varepsilon_*} \leq \Delta_e$. Очевидно, что при ограниченности b_σ , и движении замкнутой системы на пересечении многообразий $\sigma \equiv 0$ при $t \geq t_*$, и (или) выполнении условия $\mathbf{e} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ так же можно добиться выполнения условия (1.6) соответствующим выбором быстрогодействия модифицированной эталонной модели (1.22).

В соответствии с условием (1.8) сформируем целевое неравенство вида

$$Q(\mathbf{e}) \leq \Delta_e \text{ при } t \geq t_*, \quad (1.23)$$

где $Q(\mathbf{e})$ — локальный (не интегральный) целевой функционал вида

$$Q(\mathbf{e}) = 0,5\mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{e}, \quad (1.24)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0$, $\Delta_e > 0$ — точность, согласованная с Δ_e и матрицами $\mathbf{H}$.

1.2.2. Методика синтеза

Первый этап синтеза. Составим динамическую модель невязки с учетом (1.1), (1.5), (1.22) уравнение отклонений имеет вид

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}x_2 - \mathbf{A}_9\mathbf{x}_9 - \mathbf{b}_9r - \mathbf{A}_*\mathbf{\varepsilon}_* - \mathbf{b}_\sigma\sigma. \quad (1.25)$$

Выберем «идеальное» гладкое виртуальное управление x_2^{virt} выходной подсистемы из условия

$$\mathbf{a}_{12}x_2^{virt} = (\mathbf{A}_* - \mathbf{A}_{11})\mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_9 - \mathbf{A}_*)\mathbf{x}_9 + \mathbf{b}_9r. \quad (1.26)$$

Предположим, что уравнение (1.26) разрешимо относительно x_2^{virt} . Тогда «идеальное» гладкое виртуальное управление в виде (1.9)

$$x_2^{virt} = \mathbf{k}_x^*\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_9^*\mathbf{x}_9 + k_r^*r = \mathbf{k}_x^*\mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_9^*\boldsymbol{\varphi} + k_r^*r.$$

Производная по времени от целевого функционала (1.24) в силу уравнений ошибки (1.25) с учётом (1.9) при $x_2 = \sigma + x_2^{virt}$ и $b_\sigma^* = a_{12}$ (в уравнении модифицированной эталонной модели (1.22) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{Q}(\mathbf{e}) &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left[\mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} \left(\sigma + \mathbf{k}_x^* \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_9^* \mathbf{x}_9 + k_r^* r \right) - \mathbf{A}_9 \mathbf{x}_9 - \mathbf{b}_9 r - \mathbf{A}_* \mathbf{e} - \mathbf{b}_\sigma \sigma \right] = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_* \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{12} \mathbf{k}_x^* - \mathbf{A}_* \right) \mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{A}_* + \mathbf{a}_{12} \mathbf{k}_9^* - \mathbf{A}_9 \right) \mathbf{x}_9 + \left(\mathbf{a}_{12} k_r^* - \mathbf{b}_9 \right) r + \\ &+ \left(\mathbf{a}_{12} - \mathbf{b}_\sigma \right) \sigma = \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_* \mathbf{e} \leq -\rho \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{e}.\end{aligned}$$

При этом, в условиях полной априорной информации о параметрах выходного каскада, выполняется неравенство $\dot{Q}(\mathbf{e}) \leq -\rho Q(\mathbf{e})$,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0 : \mathbf{H} \mathbf{A}_* + \mathbf{A}_*^T \mathbf{H} = -\mathbf{G}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0, \quad \rho = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{G})}{\lambda_{\max}(\mathbf{H})} > 0, \quad \lambda_{\min}(\mathbf{G}),$$

$\lambda_{\max}(\mathbf{H})$ — минимальное и максимальное собственные числа матриц.

Разрешимость уравнения (1.9) относительно x_2^{virt} и в модифицированной модели (1.22) равносильно разрешимости уравнений

$$\mathbf{a}_{12} \mathbf{k}_x^* = \mathbf{A}_* - \mathbf{A}_{11}, \quad \mathbf{a}_{12} \mathbf{k}_9^* = \mathbf{A}_9 - \mathbf{A}_*, \quad \mathbf{a}_{12} k_r^* = \mathbf{b}_9, \quad b_\sigma^* = a_{12}.$$

Второй этап синтеза. Заменим в «идеальном» виртуальном управлении (1.9) матрицу «идеальных» параметров $\mathbf{k}_x^*$, k_r^* настраиваемой $\mathbf{k}_x$, k_r . Матрицу b_σ в модифицированной модели (1.22) так же считаем настраиваемой. Сформируем виртуальное управление вида

$$x_2^{virt} = \mathbf{k}_x \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_9^* \mathbf{x}_9 + k_r r. \quad (1.27)$$

Вычислим скорость изменения от целевого функционала (1.24) в силу уравнений системы (1.1), (1.22) с учётом (1.12) при $x_2 = \sigma + x_2^{virt}$

$$\begin{aligned}\dot{Q}(\mathbf{e}) &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_* \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{a}_{12} \mathbf{k}_x - \mathbf{A}_* \right) \mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{A}_* + \mathbf{a}_{12} \mathbf{k}_9^* - \mathbf{A}_9 \right) \mathbf{x}_9 + \\ &+ \left(\mathbf{a}_{12} k_r - \mathbf{b}_9 \right) r + \left(\mathbf{a}_{12} - \mathbf{b}_\sigma \right) \sigma.\end{aligned}$$

Вычисляя градиенты от скорости изменения целевого функционала $\dot{Q}(\mathbf{e})$ по настраиваемым параметрам $\mathbf{k}_x$, k_r и b_σ (в модифицированной эта-

лонной модели (1.22)). Выбирая алгоритм адаптации в дифференциальной форме

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{k}}_{\mathbf{x}} &= -\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{x}_1^T \Gamma_1 = -\text{sign}(a_{12}) \cdot \mathbf{h}_n(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_*) \mathbf{x}_1^T \Gamma_1, \\ \dot{k}_r &= -\gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} r = -\text{sign}(a_{12}) \cdot \gamma_2 \mathbf{h}_n(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_*) r, \\ \dot{b}_\sigma &= \gamma_3 \mathbf{H} \mathbf{e} \sigma = \gamma_3 \mathbf{h}_n(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_*) \sigma,\end{aligned}\tag{1.28}$$

где $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$ — матрицы коэффициентов усиления, $\mathbf{h}_n$ — n -ая строка матрицы $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Третий этап синтеза. Синтезируем управление, при котором на многообразии $\sigma \equiv 0$. Вычисляя градиент от $\mu(\sigma, u)$ (1.14), получаем семейство алгоритмов управления вида

$$u = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \text{sign}(\sigma),\tag{1.29}$$

$$u = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \sigma,\tag{1.30}$$

где $\gamma_m > 0$ — $(m \times m)$ матрицы усилителя; σ — отклонение от многообразия гиперповерхностей в форме (1.12), обеспечивающих выполнение целевого неравенства (1.13)

$$R(\sigma) \leq \Delta_\sigma, \text{ при } t \geq t^*,$$

где $R(\sigma) = 0,5\sigma^2$.

Структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 1.29.

2. Для гладкого алгоритма управления (1.30) для любого $\Delta = \min\{\Delta_e, \Delta_\sigma\} > 0$ существуют $\bar{\gamma}_m(\Delta) > 0$ такое, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_m$ цели управления (1.6), (1.8), (1.13) достигаются при любых $\Delta_e > 0$, $\Delta_\sigma > 0$, все траектории замкнутой системы ограничены. Траектории системы (1.1) — ограничены.

Для замкнутой системы с семейством алгоритмов управления существует функция Ляпунова вида

$$V(e, \sigma, \theta, b_\sigma) = Q(e) + R(\sigma) + 0,5 \cdot \left\{ (k_x - k_x^*) \Gamma_1^{-1} (k_x - k_x^*)^T \right\} + \quad (1.31)$$

$$+ 0,5 \cdot \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 + 0,5 \cdot \gamma_3^{-1} (b_\sigma^* - b_\sigma)^T (b_\sigma^* - b_\sigma),$$

где $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$.

Следствие 1. Пусть в модифицированной модели (1.22) b_σ — постоянный априорно заданный вектор и выполнена теорема 1.2. Тогда для замкнутой системы с алгоритмом управления без подсистемы адаптации вектора b_σ (1.28) справедливы утверждения 1), 2). Для замкнутой системы существует функция Ляпунова вида (1.18)

$$V(e, \sigma, \theta) = Q(e) + R(\sigma) +$$

$$+ 0,5 \cdot \left\{ (k_x - k_x^*) \Gamma_1^{-1} (k_x - k_x^*)^T + \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 \right\}.$$

Доказательство теоремы 1.2. Запишем модель системы (1.1) с учётом (1.12) в виде (1.19). Определим производные по времени от функции Ляпунова (1.31).

а) Вычислим производную по времени от 1-го слагаемого $Q(e) \triangleq 0,5e^T He$ при $x_2 = \sigma + x_2^{virt}$ с учетом виртуальных управлений (1.27), (1.28) и выходной подсистемы системы (1.19)

$$\begin{aligned}
\dot{Q}(\mathbf{e}) &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} \left(x_2^{virt} + \sigma \right) - \mathbf{A}_9 \mathbf{x}_9 - \mathbf{b}_9 r - \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_* - \mathbf{b}_\sigma \sigma \pm \mathbf{A}_* \mathbf{e} \right) = \\
&= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{A}_* \mathbf{e} + \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} \left(x_2^{virt} + \sigma \right) - \mathbf{A}_9 \mathbf{x}_9 - \mathbf{b}_9 r - \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_* - \mathbf{b}_\sigma \sigma \right) = \\
&= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_* \mathbf{e} + \\
&+ \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left((\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_*) \mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_* - \mathbf{A}_9) \mathbf{x}_9 + \mathbf{a}_{12} \left(x_2^{virt} \pm x_{2*}^{virt} \right) - \mathbf{b}_9 r + (\mathbf{a}_{12} - \mathbf{b}_\sigma) \sigma \right) \leq \\
&\leq -\rho_Q Q + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{a}_{12} \left((\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \mathbf{x}_1 + (k_r - k_r^*) r \right) + \mathbf{e}^T \mathbf{H} (\mathbf{b}_\sigma^* - \mathbf{b}_\sigma) \sigma.
\end{aligned}$$

б). Определим производную по времени от 2-го слагаемого $R(\sigma) = \sigma^T \sigma$ имеет вид (1.14).

в). Производная от последнего слагаемого имеет вид

$$\begin{aligned}
&\left(0,5 \left\{ (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)^T + \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 + \gamma_3^{-1} (\mathbf{b}_\sigma - \mathbf{b}_\sigma^*)^2 \right\} \right)' = \\
&= (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} \dot{\mathbf{k}}_x^T + \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*) \dot{k}_r + \gamma_3^{-1} (\mathbf{b}_\sigma - \mathbf{b}_\sigma^*)^T \dot{\mathbf{b}}_\sigma.
\end{aligned}$$

Объединяя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) + \left[(\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) (\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{x}_1^T + \Gamma_1^{-1} \dot{\mathbf{k}}_x)^T \right] + \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*) \dot{k}_r + \\
&+ \gamma_3^{-1} (\mathbf{b}_\sigma - \mathbf{b}_\sigma^*) \dot{\mathbf{b}}_\sigma + \sigma \cdot (\chi + bu),
\end{aligned}$$

где $\chi = \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_1 + a_{22} x_2 + \text{sign}(a_{12}) \cdot \mathbf{h}_n (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{x}_1^T \Gamma_1 \mathbf{x}_1 +$
 $+ \text{sign}(a_{12}) \cdot \gamma_2 \mathbf{h}_n (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) r^2 - k_r \dot{r} + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{a}_{12} - \mathbf{k}_x (\mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} x_2) - \mathbf{k}_9^* \dot{\boldsymbol{\varphi}}.$

Производная от правой части равенства (1.31), с учётом алгоритма адаптации (1.28), получаем

$$\dot{V} \leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) + \sigma \cdot (\chi + bu). \quad (1.32)$$

Подставляя управление u (1.15) в (1.32) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) + \sigma (\chi + u_0) - \gamma_m \sigma b \psi(\sigma). \quad (1.33)$$

Положим $u_* = -\chi - 0,5 \rho_R \sigma$, где $\rho_R > 0$. Тогда с учетом условия усиленной псевдоградиентности имеем

$$\dot{V} \leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\sigma) + \sigma (u_0 - u_*) - \gamma_m \beta |\sigma \cdot b|^\delta, \quad \beta > 0, \delta = 1, 2, \dots \quad (1.34)$$

Рассмотрим два случая: $\delta = 1$ и $\delta > 1$.

Пусть $\delta=1$ и $\psi(\sigma)$ выбрана в форме (1.29). С учетом равенства $-|b \cdot \sigma| = -\sqrt{\sigma b \cdot b \sigma} \leq \sqrt{2\lambda_{\min}(b \cdot b)}\sqrt{R(\sigma)}$, (1.34) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\sigma) + b \cdot \sigma (u_0 - u_*) - \gamma_m \beta |b \cdot \sigma| \leq \\ &\leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\sigma) - \gamma_0 |b \cdot \sigma| \leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\sigma) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где $\gamma_m \beta = \tilde{\gamma}_m \beta + \gamma_0$; $\gamma_0 > 0$; $\tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 \sqrt{2\lambda_{\min}(b \cdot b)} > 0$; $\lambda_{\min}(\cdot)$ является минимальным собственным значением; $\tilde{\gamma}_m$ удовлетворяет равенству $\tilde{\gamma}_m \beta = |u_0 - u_*|$.

Интегрируя неравенство (1.35), получаем, что при любых ограниченных начальных условиях справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \left\{ -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\sigma) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\sigma)} \right\} d\tau \leq V(0) < \infty. \quad (1.36)$$

Из (1.36) следует ограниченность $\mathbf{e}$, σ , $\mathbf{k}_x$, k_r , b_σ . Из ограниченности траекторий эталонной модели $\mathbf{x}_9$ и $\dot{\mathbf{x}}_9$ и ограниченности $\mathbf{k}_x$, k_r , b_σ следуют ограниченность $\mathbf{x}_1$, $\dot{\mathbf{x}}_1$, $\mathbf{k}_x$, k_r , b_σ соответственно. Из ограниченности $\mathbf{x}_1$, $\dot{\mathbf{x}}_1$, $\mathbf{k}_x$, k_r , b_σ в силу (1.27) следует ограниченность x_2^{virt} . Из ограниченности x_2^{virt} и σ в силу (1.12) следует ограниченность u . Тогда из ограниченности правых частей уравнения (1.25), (1.28), (1.12) ограничены. Следовательно, подынтегральная функция в (1.36) равномерно непрерывна. Тогда из леммы Барбалата [20] следует $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$, $R(\sigma) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $\sigma \rightarrow 0$, $\mathbf{e} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_* \rightarrow 0$ и, в силу гурвицевости эталонной модели (1.22), $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_9 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_9$.

Из неравенства (1.35) вытекает возможность более быстрой сходимости $R(\sigma) \rightarrow 0$ по отношению к $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$. Рассмотрим вопрос о сходимости к пересечению гиперповерхностей $\sigma \equiv 0$ более подробно. Вновь вернёмся к равенству (1.14). При выбранном в неравенстве (1.35) коэффициенте усиления $\gamma_m \beta$ получаем $\dot{R} \leq -\rho_R R(\sigma) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\sigma)} \leq -\tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\sigma)}$. Интегрируя последнее

неравенство, получаем $\sqrt{R(\sigma(t))} \leq \sqrt{R(\sigma(0))} - \frac{\tilde{\gamma}_0}{2}t$. В левой части неравенства — неотрицательная функция, в правой части — линейно убывающая функция, следовательно, существует момент времени t^* такой, что $R(\sigma(t^*)) = 0$ и справедлива оценка $t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\sigma(0))}$. Таким образом в замкнутой системе возникает настраиваемый скользящий режим и $\sigma(t) \equiv 0$ при $t \geq t^*$. Таким образом, при достаточно большом коэффициенте усиления $\gamma_m > \tilde{\gamma}_m$ за конечное время в замкнутой системе возникает настраиваемый скользящий режим и $\sigma(t) \equiv 0$ при $t \geq t^*$. Для случая $\delta = 1$ теорема доказана.

Пусть $\delta > 1$. Из неравенства (1.34) получаем $\dot{V} \leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\sigma) + dz - \gamma\beta z^\delta$, где $d \triangleq |u_0 - \bar{u}_*|$, $z \triangleq |\sigma|$. Для фиксированного Δ :

$$0 < \Delta < V_0 = Q(\mathbf{e}(0)) + R(\sigma(0)) + 0,5 \cdot \left\{ (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)^T \right\} + \\ + 0,5 \cdot \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 + 0,5 \cdot \gamma_3^{-1} (\mathbf{b}_\sigma^* - \mathbf{b}_\sigma)^T (\mathbf{b}_\sigma^* - \mathbf{b}_\sigma),$$

положим $\bar{\rho}_Q(\Delta) = \inf_{Q > \Delta} \rho_Q Q$, $\bar{\rho}_R(\Delta) = \inf_{R > \Delta} \rho_R R$, $\bar{d} = \sup_{\Omega_0} d$, где

$$\Omega_0 = \cup \left\{ (\mathbf{e}, \sigma, \theta) : Q(\mathbf{e}) + R(\sigma) + 0,5 \cdot \left\{ (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)^T \right\} + \right. \\ \left. + 0,5 \cdot \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 + 0,5 \cdot \gamma_3^{-1} (\mathbf{b}_\sigma^* - \mathbf{b}_\sigma)^T (\mathbf{b}_\sigma^* - \mathbf{b}_\sigma) \right\}.$$

Получаем $\dot{V} \leq -\bar{\rho}_Q(\Delta) - \bar{\rho}_R(\Delta) + \bar{d}z - \gamma\beta z^\delta$,

$$\max_z (\bar{d}z - \gamma\beta z^\delta) : \bar{d} - \gamma\beta \delta z^{\delta-1} = 0 \Leftrightarrow z = \left(\frac{\bar{d}}{\gamma_m \beta \delta} \right)^{\frac{1}{\delta-1}}, \quad \text{откуда} \quad \text{получаем}$$

$$\dot{V} \leq -\bar{\rho}_Q(\Delta) - \bar{\rho}_R(\Delta) + \bar{d} \frac{\delta-1}{\delta} \left(\frac{\bar{d}}{\gamma_m \beta \delta} \right)^{\frac{1}{\delta-1}}. \quad \text{Для достаточно большого } \bar{\gamma}_m \text{ суще-}$$

ствуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_m$ неравенство $\dot{V} \leq -\varepsilon_0$ будет выполняться, если будут выполняться неравенства

$$\Delta - \varepsilon_1 \leq Q + R \leq V_0, \quad (1.37)$$

где Q, R — значения функционалов в момент времени t .

Левая часть неравенства (1.37) не может выполняться в течение времени, большего, чем V_0/ε_0 . Неравенство $Q + R \leq V_0$ не может нарушиться, т.к. $V \leq V_0$. Поэтому существует такой момент времени $\tau > 0$, что

$$Q + R \leq \Delta - \varepsilon_1 \quad (1.38)$$

и, следовательно, при любом $t > \tau$ множество $G_t = \{s : s < t, Q_s + R_s \leq \Delta - \varepsilon_1\}$ непустое. Выберем $\tau_t = \sup G_t$. Функции $\rho_Q(Q) > 0$, $\rho_R(R) > 0$ при любых $Q \neq 0$, $R \neq 0$, следовательно $\bar{\rho}_Q(\Delta) > 0$, $\bar{\rho}_R(\Delta) > 0$ при любом $\Delta > 0$. Выберем $\Delta = \min\{\Delta_e, \Delta_\sigma\}$. Тогда, в силу (1.38), $Q(e) \leq \Delta - \varepsilon_1 < \Delta_e$, $R(\sigma) \leq \Delta - \varepsilon_1 < \Delta_\sigma$ при любом $t > \tau_t$.

Ограниченность траекторий e , x_2 , σ , k_x , k_r , b_σ вытекает из условия $\dot{V}_t \leq 0$ на траекториях системы, где не выполняются целевые неравенства (1.6), (1.8), (1.13) и квадратичной формы функционалов R и Q . Для случая $\delta > 2$ теорема доказана.

1.2.4. Пример синтеза и результаты математического моделирования

Пример 1.2. Двухкаскадная система описывается системой уравнений

$$\begin{cases} S_1 : \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_{12} = -\alpha_0 x_{11} - \alpha_1 x_{12} + a_{12} x_2, \\ S_2 : \dot{x}_2 = u, \\ y = x_{11}, \quad x_{11}(0) = 0,5, \quad x_{12}(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, a_{12}$ — неизвестные постоянные параметры.

Желаемый выход: $f(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t$, где $a_0 = 0.3$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.6$, $\omega = 1$. Целью управления является достижение неравенства (1.2).

Генерирующая модель в форме (1.5)

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_3 + \mathbf{b}_3 r, \quad \mathbf{y}_3 = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \mathbf{x}_3,$$

где $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p_0 = \omega^2$, $p_1 = 0$, $r = a_0 \omega^2$, $x_{31}(0) = a_0 + a_2$,
 $x_{32}(0) = a_1 \omega$.

Модифицированная эталонная модель в соответствии с (1.22) зададим уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_* + \mathbf{b}_\sigma \sigma, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_*(0) = \boldsymbol{\varepsilon}_{*0},$$

где $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ b_\sigma \end{pmatrix}$, $a_0^* = 4$, $a_1^* = 4$.

Выбирая $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, получаем $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгоритм виртуального управления имеет форму (1.10)

$$x_2^{virt} = k_{x_1} x_{11} + k_{x_2} x_{12} + k_{\varphi_1}^* f + k_{\varphi_1}^* f' + k_r r$$

и алгоритм адаптации модифицированного алгоритма в соответствии с (1.28) и условием задачи имеет вид

$$\dot{k}_{x_1} = -\gamma_1 \delta x_1, \quad \dot{k}_{x_2} = -\gamma_1 \delta x_2, \quad \dot{k}_r = -\gamma_2 \delta r, \quad \dot{b}_\sigma = -\gamma_3 \delta \sigma,$$

где $\delta = e_1 + e_2$, $e_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{1*}$, $e_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_{2*}$, $\varepsilon_1 = x_{11} - f$, $\varepsilon_2 = x_{12} - f'$.

Алгоритм управления в соответствии с (1.29) или (1.30) имеет вид

$$u = -\gamma_m \cdot \text{sign}(\sigma),$$

$$u = -\gamma_m \cdot \sigma,$$

где $\gamma_m > 0$, $\sigma = x_2 - x_2^{virt}$.

Результаты математического моделирования системы модифицированного алгоритма с алгоритмом релейного управления (1.29) при $\gamma_m = 15$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $a_{12} = 1$, $\gamma_1 = 6$, $\gamma_2 = 12$, $\gamma_3 = 0.84$ и с начальными условиями $k_{x_1}(0) = -4.5$, $k_{x_2}(0) = -2.5$, $k_r(0) = 0.2$, $b_\sigma(0) = 0.6$ приведены на рис. 1.30 – рис. 1.38.

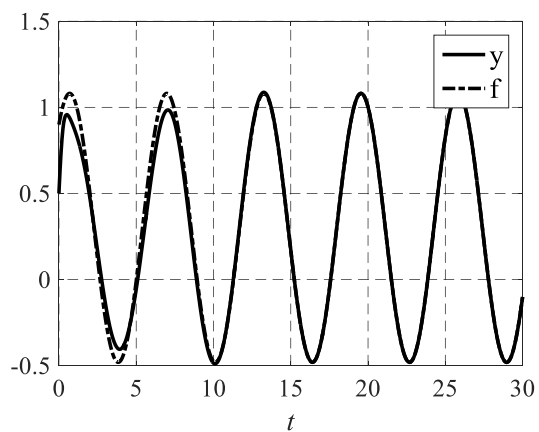


Рис. 1.30. Траектории объекта управления и вектора функции Φ

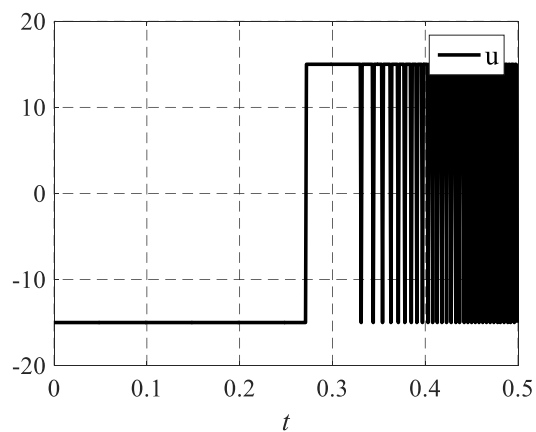


Рис. 1.33. График управления

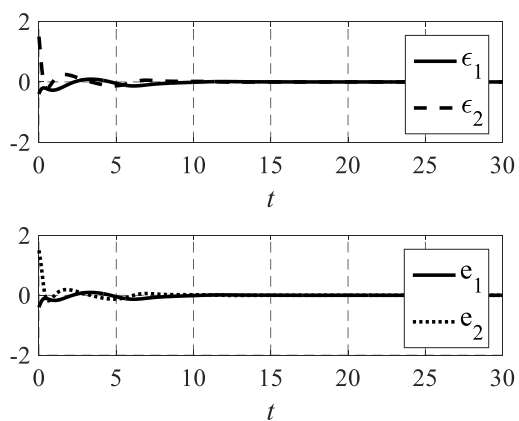


Рис. 1.31. Ошибки слежения

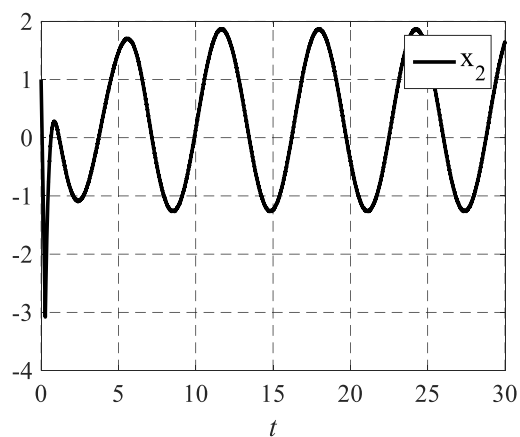


Рис. 1.34. Вход выходного каскада

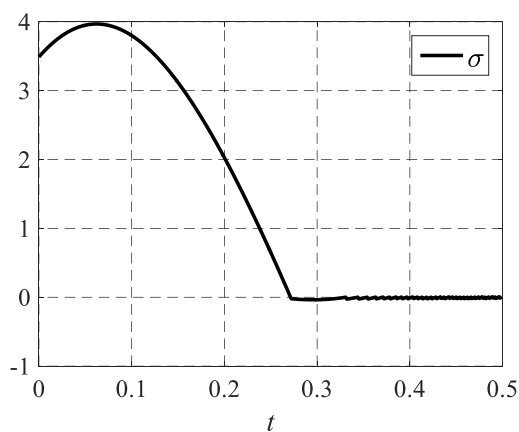


Рис. 1.32. Отклонения от пересечения многообразий

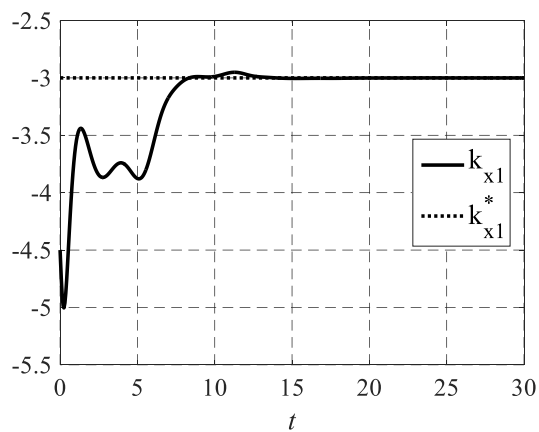


Рис. 1.35. Результаты настраиваемых k_{x_1} и идеальных $k_{x_1}^*$ параметров

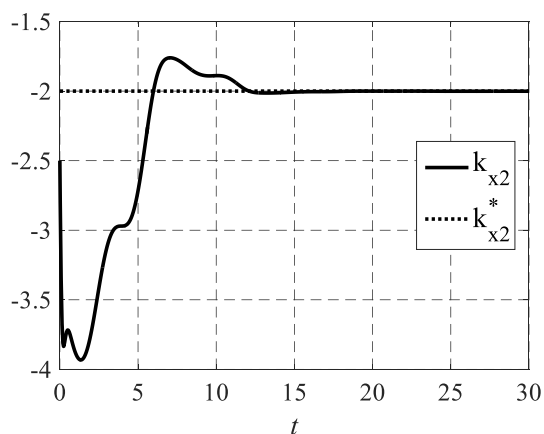


Рис. 1.36. Результаты настраиваемых k_{x2} и идеальных k_{x2}^* параметров

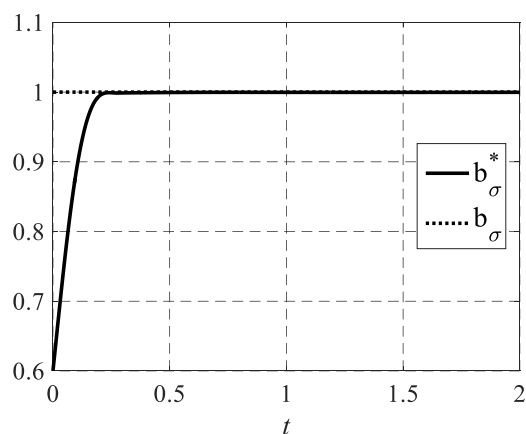


Рис. 1.38. Результаты настраиваемых b_σ и идеальных b_σ^* параметров

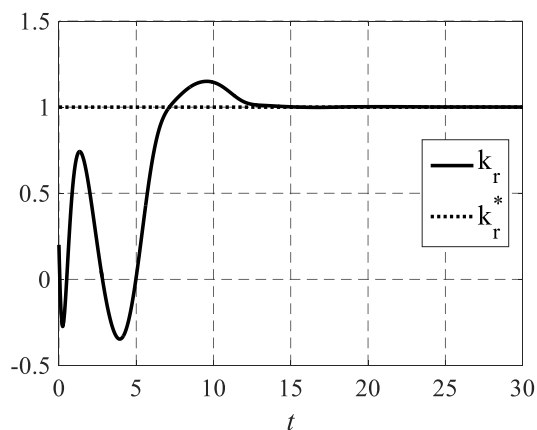


Рис. 1.37. Результаты настраиваемых k_r и идеальных k_r^* параметров

Выше представлены результаты синтеза алгоритмов управления с модифицированной эталонной моделью. По сравнению с результатами алгоритмов адаптивного управления с явной эталонной моделью (рис. 1.5 – рис. 1.12) алгоритмы с модифицированной эталонной моделью (рис. 1.30 – рис. 1.37) обеспечивают ограниченность траекторий замкнутой системы и идентификацию параметров при меньших коэффициентах усиления релейного управления (на 25%) и коэффициентах усиления в алгоритме адаптации (1.28).

1.3. Алгоритмы управления с адаптацией параметров в конечной форме

Выше предложена методика синтеза алгоритмов адаптивного управления для линейных двухкаскадных систем с адаптацией параметров в дифференциальной форме. В данном разделе предлагается использовать алгоритм адаптации параметров в конечной (недифференциальной) форме. Для линейных двухкаскадных систем управления представлена постановка задачи с явной эталонной моделью выходного каскада.

1.3.1. Постановка задачи синтеза. Методика синтеза

Рассмотрим задачу синтеза алгоритма управления для каскадного линейного стационарного объекта (1.1) и цель управления (1.2).

Зададим генерирующую модель (1.5) и явную эталонную модель (1.7) по выходу конечного каскада. Введём достижения дополнительной ЦУ в виде условия (1.8). В результате *первого этапа* синтеза алгоритм «идеального» виртуального управления имеет вид (1.9).

На втором этапе заменяются неизвестные параметры в «идеальном» виртуальном управлении настраиваемыми

$$x_2^{virt} = \mathbf{k}_x \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_\varphi^* \boldsymbol{\varphi} + k_r r \quad (1.39)$$

и синтезируется алгоритм адаптации параметров в конечной (недифференциальной) форме

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_x &= \mathbf{k}_x^0 - \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{x}_1^T \Gamma_1 = \mathbf{k}_x^0 - \text{sign}(a_{12}) \cdot \mathbf{h}_n (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{x}_1^T \Gamma_1, \\ k_r &= k_r^0 - \gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} r = k_r^0 - \text{sign}(a_{12}) \cdot \gamma_2 \mathbf{h}_n (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) r, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$, $\gamma_2 > 0$ — матрицы коэффициентов усиления, $\mathbf{h}_n$ — n -ая строка матрицы $\mathbf{H}$, $\mathbf{k}_x^0$, k_r^0 — матрицы (могут быть выбраны нулевыми) априорных оценок.

На третьем этапе выберем управление из семейства (1.15), при котором на многообразии $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$.

Вычисляя градиент от $\mu(\sigma, u)$ и полагая $u_0 = 0$, получаем релейный и гладкий алгоритмы вида

$$u = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \text{sign}(\sigma), \quad (1.41)$$

$$u = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \sigma. \quad (1.42)$$

Структурная схема замкнутой адаптивной системы управления с конечным алгоритмом адаптации представлена на рис. 1.39.

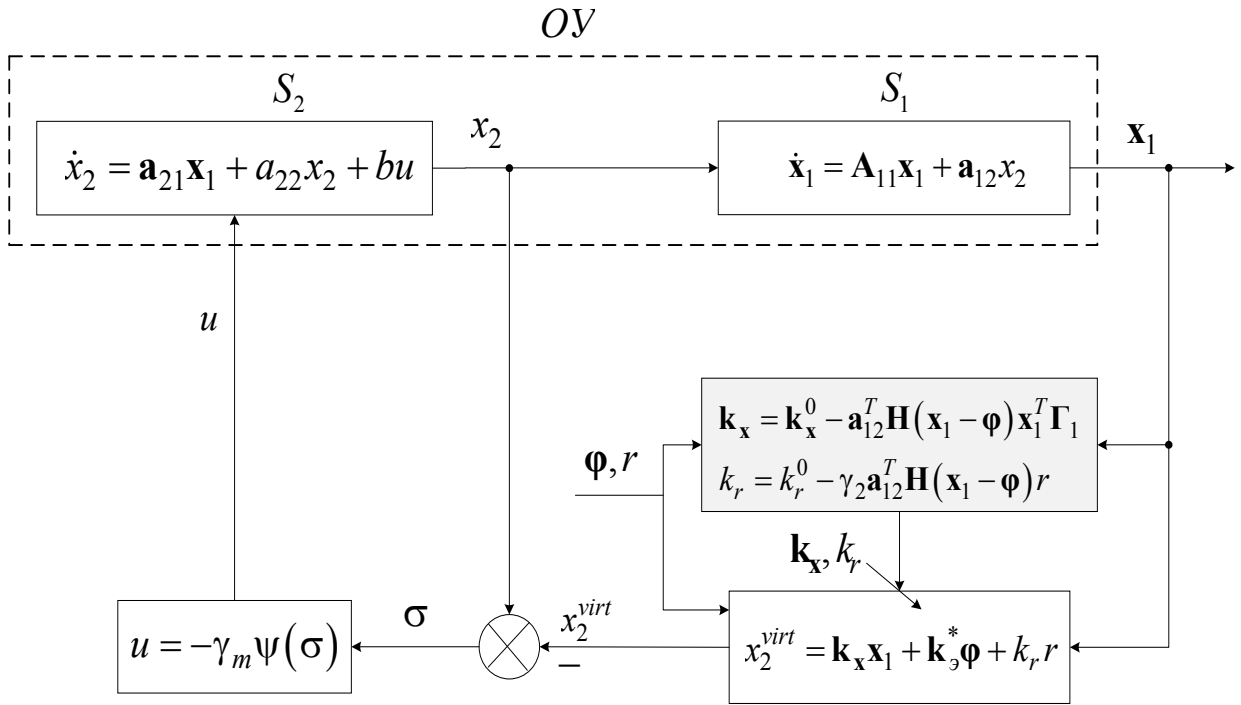


Рис. 1.39. Замкнутая адаптивная система управления

1.3.2. Основные результаты

Сформулируем основной результат синтеза в виде следующей теоремы.

Теорема 1.3. Для системы (1.1), (1.5), (1.7), (1.12), (1.39), (1.40) с алгоритмами управления (1.41) или (1.42) справедливы утверждения:

1. Для релейного алгоритма управления (1.41) существуют $\tilde{\gamma}_i > 0$ ($i=1,2$), $\tilde{\gamma}_m > 0$ такие, что при $\gamma_i > \tilde{\gamma}_i$, $\gamma_m > \tilde{\gamma}_m$ цели управления (1.6), (1.8), (1.13) достигаются при любых $\Delta_{\epsilon} > 0$, $\Delta_{\sigma} > 0$, все траектории замкну-

той системы ограничены. Существует момент времени t^* , такой, что $R(\sigma(t)) \equiv 0$ ($\sigma(t) \equiv 0$) при $t \geq t^*$. При $\gamma_i \rightarrow \infty$ цель управления (1.2) предельно достижима, т.е. $Q(e) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

2. Для гладкого алгоритма управления (1.42) существуют $\bar{\gamma}_i > 0$ ($i=1,2$), $\bar{\gamma}_m > 0$ такие, что при $\gamma_i > \bar{\gamma}_i$, $\gamma_m > \bar{\gamma}_m$ цели управления (1.6), (1.8), (1.13) достигаются при любых $\Delta_e > 0$, $\Delta_\sigma > 0$, все траектории замкнутой системы ограничены. При $\gamma_i \rightarrow \infty$, $\gamma_m \rightarrow \infty$ справедливо $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(e) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3. Для замкнутой системы с семейством алгоритмов управления существует функция Ляпунова вида

$$V(e, \sigma, \theta) = Q(e) + R(\sigma). \quad (1.43)$$

1.3.3. Пример синтеза и результаты математического моделирования с адаптацией в конечной форме

Пример 1.3. Двухкаскадная система описывается системой уравнений

$$\begin{cases} S_1: \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_{12} = -\alpha_0 x_{11} - \alpha_1 x_{12} + a_{12} x_2, \\ S_2: \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

$$y = x_{11}, \quad x_{11}(0) = 0,5, \quad x_{12}(0) = 2, \quad x_2(0) = 1,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, a_{12}$ — неизвестные постоянные параметры.

Желаемый выход: $f(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t$, где $a_0 = 0.3$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.6$, $\omega = 1$. Целью управления является достижение неравенства (1.2).

Генерирующая модель в форме (1.5)

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_3 + \mathbf{b}_3 r, \quad \mathbf{y}_3 = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \mathbf{x}_3,$$

$$\text{где } \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_0 = \omega^2, \quad p_1 = 0, \quad r = a_0 \omega^2, \quad x_{31}(0) = a_0 + a_2,$$

$$x_{32}(0) = a_1 \omega.$$

Эталонная модель в соответствии с (1.7) зададим уравнением

$$\dot{\mathbf{\epsilon}}_* = \mathbf{A}_* \mathbf{\epsilon}_*, \quad \mathbf{\epsilon}_*(0) = 0,$$

где $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* \end{pmatrix}$, $a_0^* = 4$, $a_1^* = 4$.

Выбирая $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, получаем $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгоритм виртуального управления имеет форму (1.39)

$$x_2^{virt} = k_{x_1} x_{11} + k_{x_2} x_{12} + k_{x_1}^* f + k_{x_1}^* f' + k_r r$$

и алгоритм адаптации **в конечной форме** в соответствии с (1.40) и условием задачи имеет вид

$$k_{x_1} = -\gamma_1 \delta x_1, \quad k_{x_2} = -\gamma_1 \delta x_2, \quad k_r = -\gamma_2 \delta r,$$

где $\delta = \epsilon_1 + \epsilon_2$, $\epsilon_1 = x_{11} - f$, $\epsilon_2 = x_{12} - f'$.

Алгоритм управления имеет вид (1.41) или (1.42).

На рис. 1.40– рис. 1.47 приведены результаты моделирования системы с алгоритмом релейного управления (1.41) при $\gamma_m = 45$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $a_{12} = 1$, $\gamma_1 = 40$, $\gamma_2 = 50$ и с начальными условиями $k_{x_1}(0) = -4.5$, $k_{x_2}(0) = -2.5$, $k_r(0) = 0.2$.

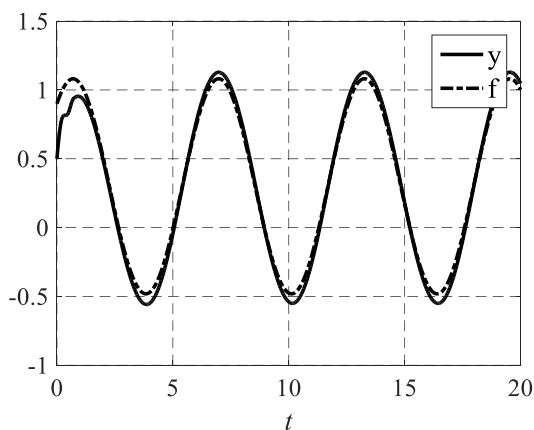


Рис. 1.40. Траектории объекта управления и вектора функции Φ

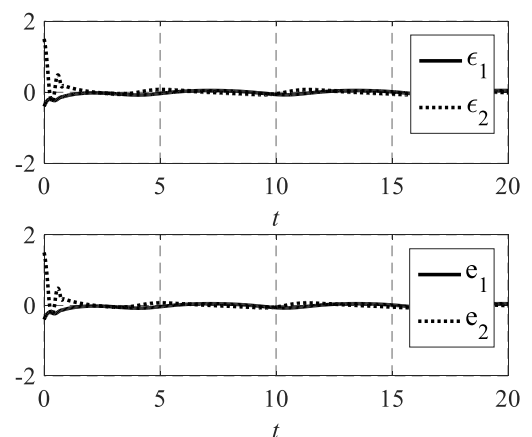


Рис. 1.41. Ошибки слежения

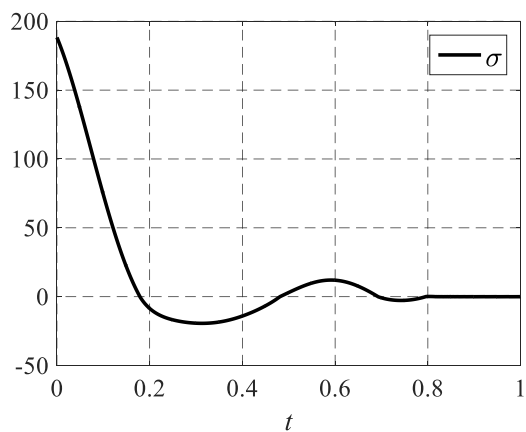


Рис. 1.42. Отклонения от пересечения многообразий

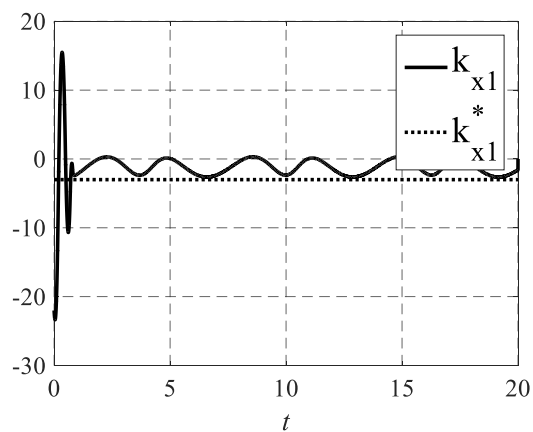


Рис. 1.45. Результаты настраиваемых k_{x1} и идеальных k_{x1}^* параметров

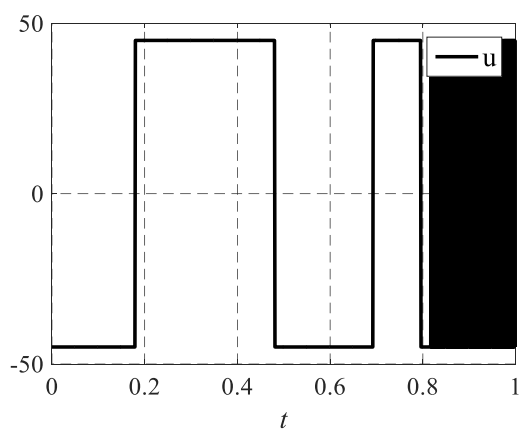


Рис. 1.43. График управления

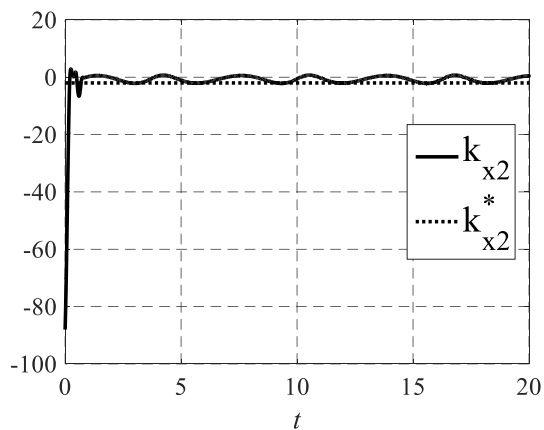


Рис. 1.46. Результаты настраиваемых k_{x2} и идеальных k_{x2}^* параметров

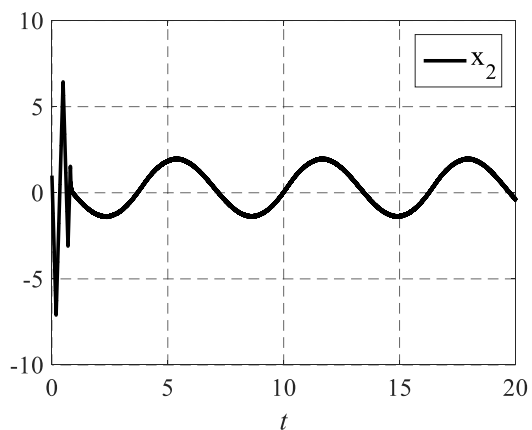


Рис. 1.44. Вход выходного каскада

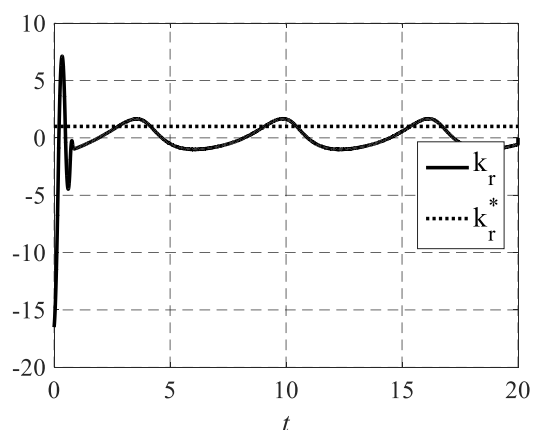


Рис. 1.47. Результаты настраиваемых k_r и идеальных k_r^* параметров

Результаты моделирования системы с алгоритмами адаптацией параметров в конечной форме с управлением в релейной форме подтверждают достижение заданной спектральной динамики конечного каскада с конечной точностью и обеспечение ограниченности траекторий замкнутой системы. Повышение качества и точности слежения может быть обеспечено увеличением коэффициентов усиления адаптации (Γ_1, γ_2). Алгоритм адаптации параметров в конечной форме не обладают идентифицирующими свойствами. Но очевидно, что результаты в дифференциальной форме наблюдается хорошая сходимость траектории объекта управления к желаемой спектральной динамике и хорошие идентифицирующие свойства.

1.3.4. Сравнительный анализ с адаптациями алгоритмов управления в дифференциальной и конечной форме

Результаты моделирования сравнительного анализа с адаптацией в дифференциальной форме (рис. 1.5 – рис. 1.12) и в конечной форме (рис. 1.40– рис. 1.47) представлены на таблице 1.1.

Таблица 1.1

Результаты моделирования сравнительного анализа алгоритмов с настраиваемой поверхностью скольжения
(в дифференциальной и конечной форме).

Алгоритм адаптации	Качества парирования координатных возмущений (по $\varepsilon(t)$)				Наличие идентифицирующих свойств	Диапазон изменения параметров
	быстродействие	колебательность	точность	максимум амплитуды		
Дифференциальная форма	низкое	высокая	$\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$	не большая (20)	есть	широкий
Конечная форма	высокое	не высокая	$ \varepsilon(t) \leq C$, где $C = C(\Gamma_i)$, $C \downarrow$ при $\Gamma_i \uparrow$.	большая (45)	нет	узкий

Алгоритмы адаптации сравнивались по следующим критериям: быстроедействие, колебательность, точность, максимум амплитуда u , наличие идентифицирующих свойств, диапазон изменения параметров.

Каждый из алгоритмов имеет свои достоинства и недостатки. Поэтому целесообразно использовать комбинированные алгоритмы адаптации.

$$\mathbf{k}_x = \alpha \mathbf{k}_{x-\text{диф}} + (1 - \alpha) \mathbf{k}_{x-\text{кон}},$$

$$k_r = \alpha k_{r-\text{диф}} + (1 - \alpha) k_{r-\text{кон}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $\mathbf{k}_{x-\text{диф}} : \dot{\mathbf{k}}_x = -\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{Hex}_1^T \Gamma_1$, $k_{r-\text{диф}} : \dot{k}_r = -\gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{Her}$,

$\mathbf{k}_{x-\text{кон}} : \mathbf{k}_x = \mathbf{k}_x^0 - \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{Hex}_1^T \Gamma_1$, $k_{r-\text{кон}} : k_r = k_r^0 - \gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{Her}$.

1.4. Алгоритм настраиваемого скользящего режима с динамически изменяемым коэффициентом усиления и ЯЭМ конечного каскада

В данном разделе рассматривается настраиваемый скользящий режим (НСР) с динамически изменяемым коэффициентом усиления и явной эталонной моделью конечного каскада. НСР (подкласс алгоритмов скоростного биградиента) обеспечивает высокое качество управления за счет достаточно большого коэффициента усиления (γ_m) релейной обратной связи. В работе [98], для классического скользящего режима предложено использовать переменный, динамически изменяемый коэффициент усиления по каналу управления для снижения энергетических затрат на управление.

1.4.1. Постановка задачи синтеза. Методика синтеза

Вернёмся к постановке задачи и её решению, приведённым в разделе 1.1. Рассматривается каскадная линейная модель объекта управления в регулярной форме (1.1) с генерирующей моделью (1.5) требуется обеспечить ограниченность траекторий замкнутой системы и достижение целевого неравенства (1.2).

В результате первых двух этапов синтеза алгоритм виртуального управления имеет вид

$$x_2^{virt} = \mathbf{k}_x \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_\varphi^* \boldsymbol{\varphi} + k_r r, \quad (1.44)$$

а алгоритм адаптации описывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}}_x &= -\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{x}_1^T \Gamma_1 = -\text{sign}(a_{12}) \cdot \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) \mathbf{x}_1^T \Gamma_1, \\ \dot{k}_r &= -\gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} r = -\text{sign}(a_{12}) \cdot \gamma_2 \mathbf{h}_n(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\varphi}(t)) r. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Рассмотрим более детально третий этап синтеза.

Третий этап синтеза. Синтезируем управление, при котором на многообразии $\sigma \equiv 0$ и выберем алгоритм управления настраиваемого скользящего режима (1.16) запишем в форме

$$u = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \text{sign}(\sigma), \quad (1.46)$$

где $\sigma = x_2 - x_2^{virt}$ в уравнении (1.12).

Коэффициент усиления γ_m изменяется согласно следующему алгоритму [98]:

$$\text{если } |\sigma| \neq 0, \text{ то} \quad \gamma_m = \frac{k_1}{D} |\sigma|, \quad (1.47)$$

$$\text{если } |\sigma| = 0, \text{ то} \quad \gamma_m = k_2 |n| + k_3, \tau \dot{n} + n = \text{sign}(\sigma), \quad (1.48)$$

где $D = \frac{d}{dt}$, $\gamma_m(0) > 0$, $n > 0$, $0 < \tau \ll 1$, $k_1 > 0$, $k_3 > 0$, $k_2 = \gamma_m(t^*)$, t^* момент времени возникновения настраиваемого скользящего режима $\sigma(t^*) = 0$.

Структурная схема замкнутой системы с релейным управлением и динамически изменяемым коэффициентом усиления представлена на рис. 1.48.

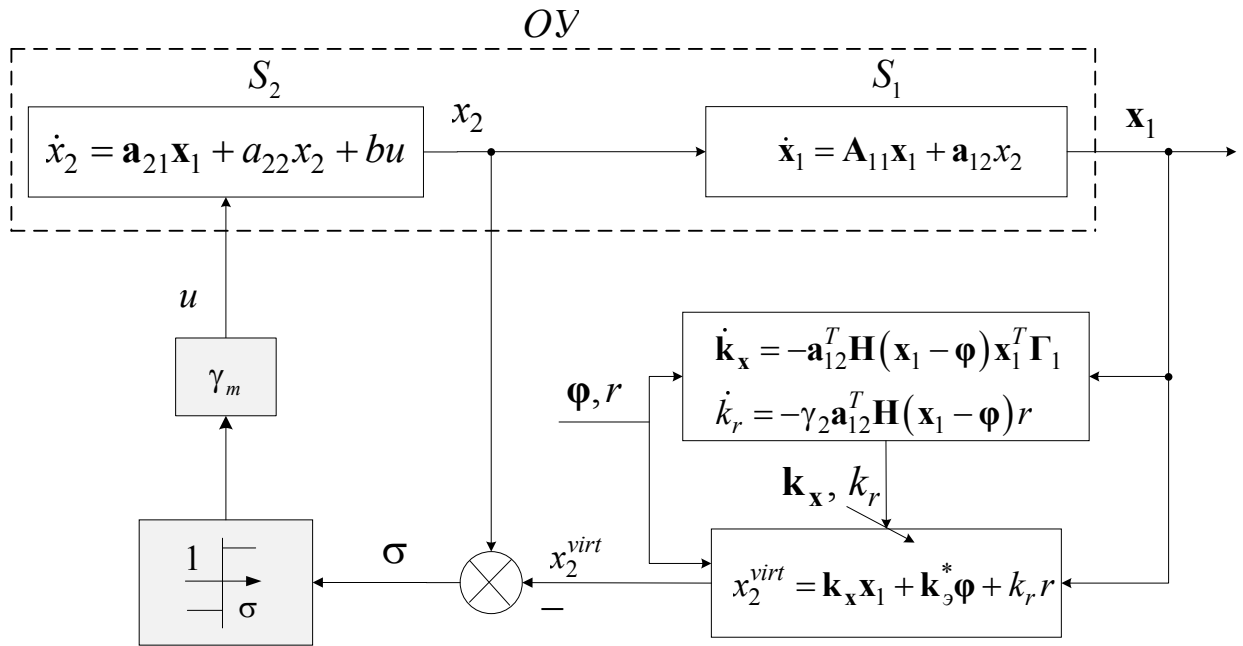


Рис. 1.48. Замкнутая адаптивная система управления

1.4.2. Основные результаты и анализ устойчивости замкнутой системы

Сформулируем основной результат синтеза в виде следующей теоремы.

Теорема 1.4. Для системы (1.1), (1.5), (1.7), (1.12), (1.44), (1.45) с алгоритмом управления (1.46) с динамически изменяемым коэффициентом усиления (1.47), (1.48) существуют $k_i > 0, i = \overline{1,3}$ такие, что все траектории замкнутой системы ограничены и достигаются цели управления (1.6), (1.8), (1.13). Существует момент времени t_r такой, что $\sigma \equiv 0$ при $t \geq t_r$. $R(\sigma) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sigma \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для замкнутой системы с семейством алгоритмов управления существует функция Ляпунова вида

$$V(\mathbf{e}, \sigma, \boldsymbol{\theta}) = Q(\mathbf{e}) + R(\sigma) + 0,5 \cdot \left\{ (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)^T \right\} + \\ + 0,5 \cdot \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 + 0,5 \gamma^{-1} (\gamma_m - \gamma_m^*)^2, \quad (1.49)$$

где $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_m^* : |\dot{\sigma}| \leq \gamma_m^*$, $\dot{\sigma} = \dot{x}_2 - \dot{x}_2^{virt}$ — уравнение невязки в силу (1.12).

Доказательство теоремы 1.4. Определим производную по времени от функции Ляпунова (1.49).

а) Вычислим производную по времени от 1—го слагаемого $Q(\mathbf{e}) \triangleq 0,5 \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{e}$ при $x_2 = \sigma + x_2^{virt}$

$$\begin{aligned} \dot{Q}(\mathbf{e}) &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} (x_2^{virt} + \sigma) - \mathbf{A}_9 \mathbf{x}_9 - \mathbf{b}_9 r - \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_* \pm \mathbf{A}_* \mathbf{e} \right) = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left(\mathbf{A}_* \mathbf{e} + \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} (x_2^{virt} + \sigma) - \mathbf{A}_9 \mathbf{x}_9 - \mathbf{b}_9 r - \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_* \right) = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{A}_* \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \left((\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_*) \mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_* - \mathbf{A}_9) \mathbf{x}_9 + \mathbf{a}_{12} (x_2^{virt} \pm x_2^{virt*} + \sigma) - \mathbf{b}_9 r \right) \leq \\ &\leq -\rho Q + \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{a}_{12} \left((\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \mathbf{x}_1 + (k_r - k_r^*) r + \sigma \right). \end{aligned}$$

б) Определим производную от $R(\sigma) = 0,5 \sigma^2$

$$\mu(\sigma, u) = \sigma (\dot{x}_2 - \dot{x}_2^{virt}) = \sigma \cdot (\chi + bu).$$

в) Производная от последнего слагаемого имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(0,5 \left\{ \left(\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^* \right) \Gamma_1^{-1} \left(\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^* \right)^T + \gamma_2^{-1} \left(k_r - k_r^* \right)^2 + \gamma^{-1} \left(\gamma_m - \gamma_m^* \right)^2 \right\} \right)' = \\ & = \left(\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^* \right) \Gamma_1^{-1} \dot{\mathbf{k}}_x^T + \gamma_2^{-1} \left(k_r - k_r^* \right) \dot{k}_r + \gamma^{-1} \left(\gamma_m - \gamma_m^* \right) \dot{\gamma}_m. \end{aligned}$$

Объединяя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\rho_Q Q(\mathbf{e}) + \left[\left(\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^* \right) \left(\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{x}_1^T + \Gamma_1^{-1} \dot{\mathbf{k}}_x \right)^T \right] + \gamma_2^{-1} \left(k_r - k_r^* \right) \dot{k}_r + \\ & + \gamma^{-1} \left(\gamma_m - \gamma_m^* \right) \dot{\gamma}_m + \sigma \cdot \left(\mathbf{a}_{12} \mathbf{H} \mathbf{e}^T + \chi + bu \right). \end{aligned}$$

Учитывая вид алгоритма адаптации (1.45) и вводя дополнительное обозначение $F = \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{a}_{12} + \chi$, получаем

$$\dot{V} \leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) + \underbrace{\sigma^T \{F + bu\}}_M + \gamma^{-1} \left(\gamma_m - \gamma_m^* \right) \dot{\gamma}_m. \quad (1.50)$$

Заметим, что вектор F является функцией от переменных $\mathbf{z} = \text{col} \{ \mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{k}_x, \dot{\mathbf{k}}_x, k_r, \dot{k}_r \}$, и в силу уравнений (1.1), (1.5), (1.7), (1.45) локально ограничен по своим аргументам в любой ограниченной области $Z \subset R^{10}$, т.е.

$$|F| \leq F_M \text{ при } \mathbf{z} \in Z.$$

Следовательно, существует верхняя граница γ_m^* для коэффициента $\gamma_m(t)$ так, что

$$\gamma_m(t) < \gamma_m^* \quad \forall t \geq 0.$$

Алгоритм изменения коэффициента $\gamma_m(t)$ определяется переменной структурой согласно (1.47), (1.48). В соответствии с этим рассмотрим два случая: $\sigma \neq 0$ и $\sigma = 0$.

При $\sigma \neq 0$ динамика $\gamma_m(t)$ определяется уравнением (1.47). Тогда для двух последних слагаемых (1.50) с учётом алгоритма (1.46) имеем

$$\begin{aligned}
M &= \sigma \cdot F - \sigma \cdot \gamma_m \cdot \text{sign}(\sigma) + \frac{1}{\gamma} (\gamma_m - \gamma_m^*) k_1 |\sigma| \leq \\
&\leq F_M \cdot |\sigma| - \gamma_m |\sigma| + \frac{1}{\gamma} (\gamma_m - \gamma_m^*) k_1 |\sigma| \leq \\
&\leq F_M |\sigma| - \gamma_m |\sigma| \pm \gamma_m^* |\sigma| + \frac{1}{\gamma} (\gamma_m - \gamma_m^*) k_1 |\sigma| = \\
&= (F_M - \gamma_m^*) |\sigma| + (\gamma_m - \gamma_m^*) \left(-|\sigma| + \frac{k_1}{\gamma} |\sigma| \right).
\end{aligned}$$

Так как существует $\gamma_m^* > 0$ такой, что $\gamma_m - \gamma_m^* < 0$ при любых $t > 0$, получаем

$$M \leq -\underbrace{(\gamma_m^* - F_M)}_{\beta_\sigma} |\sigma| - \underbrace{\left(-|\sigma| + \frac{k_1}{\gamma} |\sigma| \right)}_{\beta_k} |\gamma_m - \gamma_m^*|.$$

Существуют γ_m^* и γ такие, что при $\gamma_m^* > F_M$ и $\gamma < k_1$ обеспечивается $\beta_\sigma > 0$, $\beta_k > 0$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
M &\leq -\beta_\sigma \cdot \sqrt{2} \frac{|\sigma|}{\sqrt{2}} - \beta_k \sqrt{2\gamma} \frac{|\gamma_m - \gamma_m^*|}{\sqrt{2\gamma}} \leq \\
&\leq -\min\{\beta_\sigma \sqrt{2}, \beta_k \sqrt{2\gamma}\} \left(\frac{|\sigma|}{\sqrt{2}} + \frac{|\gamma_m - \gamma_m^*|}{\sqrt{2\gamma}} \right) \leq \\
&\leq -\beta \sqrt{R(\sigma) + 0,5\gamma^{-1}(\gamma_m - \gamma_m^*)^2},
\end{aligned}$$

где $\beta = \sqrt{2} \min\{\beta_\sigma, \beta_k \sqrt{\gamma}\}$.

Таким образом, имеем

$$\dot{V} \leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \beta \sqrt{R(\sigma) + 0,5\gamma^{-1}(\gamma_m - \gamma_m^*)^2}. \quad (1.51)$$

Интегрируя неравенство (1.51), получаем

$$\int_0^t \left\{ -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \beta \sqrt{R(\sigma) + 0,5\gamma^{-1}(\gamma_m - \gamma_m^*)^2} \right\} d\tau \leq V(0) < \infty. \quad (1.52)$$

Из (1.52) следует ограниченность $\mathbf{e}$, σ , $\mathbf{k}_x$, k_r , γ_m . Из ограниченности $\mathbf{k}_x$, k_r , ограниченности траекторий эталонной модели $\mathbf{x}_3, \gamma_m^*$ следуют ограниченность $\mathbf{x}$, γ_m и как следствие ограниченность x_2^{virt} и F . Из ограниченности x_2^{virt} и σ следует ограниченность u . Из ограниченности, u , F следует ограниченность $\dot{\sigma} = F + bu$. Ограниченность $\dot{\sigma}$, и $\dot{e}$ (в силу правых частей уравнений $\dot{Q}(\mathbf{e}) \leq -\rho Q(\mathbf{e})$) и $\dot{\gamma}_m$ (в силу уравнения (1.47)) приводит к равномерной непрерывности $\sigma(t)$ и $\mathbf{e}(t), \gamma_m(t)$ соответственно. Следовательно, подынтегральная функция в (1.51) равномерно непрерывна. Тогда из леммы Барбалата [20] следует что $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$, $R(\sigma) \rightarrow 0$, $\gamma_m \rightarrow \gamma_m^*$ при $t \rightarrow \infty$. А из квадратичного вида $Q(\mathbf{e})$ и $R(\sigma)$ получаем $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$, $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Более того, из анализа устойчивости по вектору σ следует, что траектории системы сходятся за конечное время $t_r \leq \frac{2R(0)^{1/2}}{\beta}$.

Рассмотрим случай $\sigma = 0$. В этом случае, $\gamma_m(t)$ — изменяется согласно уравнениям (1.48).

С точностью до обозначений справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [78]. Для системы $\dot{\sigma} = F - (k_2|n| + k_3)\text{sign}(\sigma)$ существует скользящий режим при $k_2 \geq |F|$.

1.4.3. Пример синтеза и результаты математического моделирования

Пример 1.4. Двухкаскадная система описывается системой уравнений

$$\begin{cases} S_1: \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_{12} = -\alpha_0 x_{11} - \alpha_1 x_{12} + a_{12} x_2, \\ S_2: \dot{x}_2 = u, \\ y = x_{11}, \quad x_{11}(0) = 0,5, \quad x_{12}(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, a_{12}$ — неизвестные постоянные параметры.

Желаемый выход: $f(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t$, где $a_0 = 0.3$, $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.6$, $\omega = 1$. Целью управления является достижение неравенства (1.2).

Генерирующая модель в форме (1.5)

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{A}_3 \mathbf{x}_3 + \mathbf{b}_3 r, \quad \mathbf{y}_3 = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \mathbf{x}_3,$$

где $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p_0 = \omega^2$, $p_1 = 0$, $r = a_0 \omega^2$, $x_{31}(0) = a_0 + a_2$, $x_{32}(0) = a_1 \omega$.

Эталонная модель в соответствии с (1.7) зададим уравнением

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{A}_* \boldsymbol{\varepsilon}_*, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_*(0) = 0,$$

где $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ b_\sigma \end{pmatrix}$, $a_0^* = 4$, $a_1^* = 4$.

Выбирая $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, получаем $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгоритм виртуального управления имеет форму (1.44)

$$x_2^{virt} = k_{x_1} x_{11} + k_{x_2} x_{12} + k_{x_1}^* f + k_{x_2}^* f' + k_r r$$

и алгоритм адаптации в дифференциальной форме в соответствии с (1.45) и условием задачи имеет вид

$$\dot{k}_{x_1} = -\gamma_1 \delta x_1, \quad \dot{k}_{x_2} = -\gamma_1 \delta x_2, \quad \dot{k}_r = -\gamma_2 \delta r,$$

где $\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = x_{11} - f$, $\varepsilon_2 = x_{12} - f'$.

Алгоритм управления на основе настраиваемого скользящего режима (1.46)

$$u = -\gamma_m \cdot \text{sign}(\sigma),$$

где γ_m – динамически изменяемый коэффициент усиления реализуется алгоритму (1.47), (1.48).

Результаты математического моделирования системы управления приведены на рис. 1.49 – рис. 1.56 $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $a_{12} = 1$, $\gamma_1 = 7$, $\gamma_2 = 15$ и с начальными условиями $k_{x_1}(0) = -4.5$, $k_{x_2}(0) = -2.5$, $k_r(0) = 0.2$.

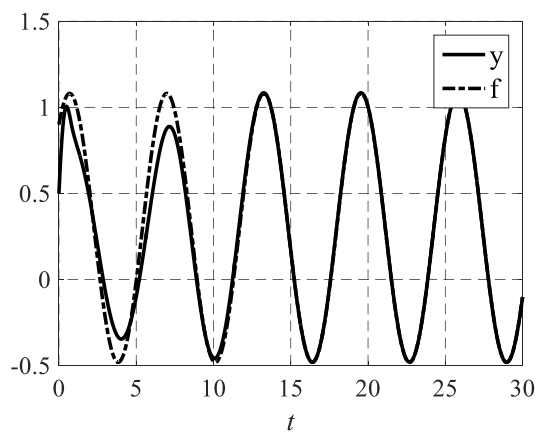


Рис. 1.49. Траектории объекта управления и вектора функции Φ

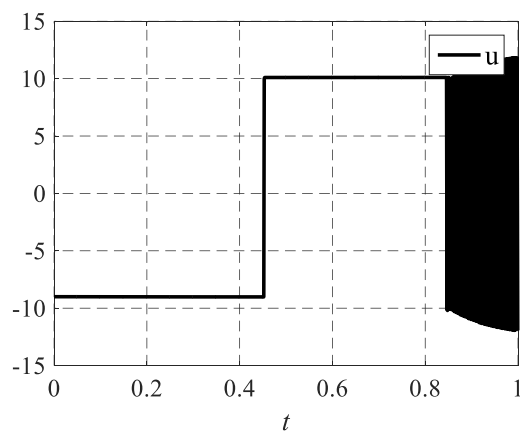


Рис. 1.52. График управления

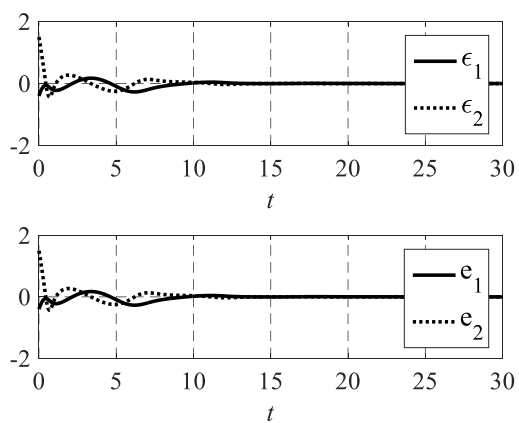


Рис. 1.50. Ошибки слежения

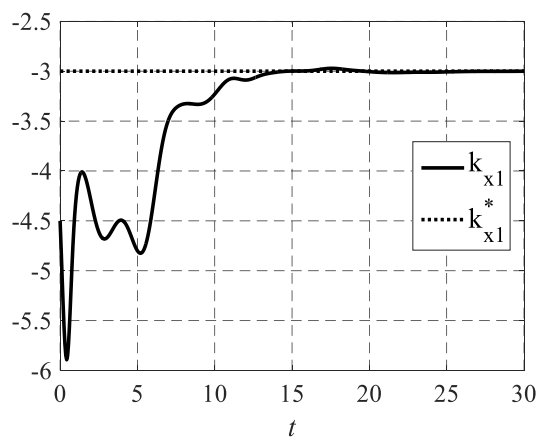


Рис. 1.53. Результаты настраиваемых k_{x1} и идеальных k_{x1}^* параметров

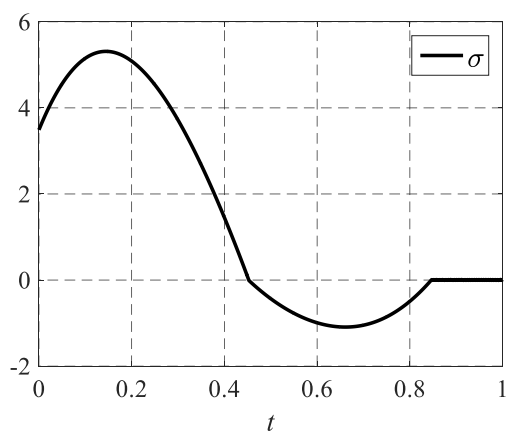


Рис. 1.51. Отклонения от пересечения многообразий

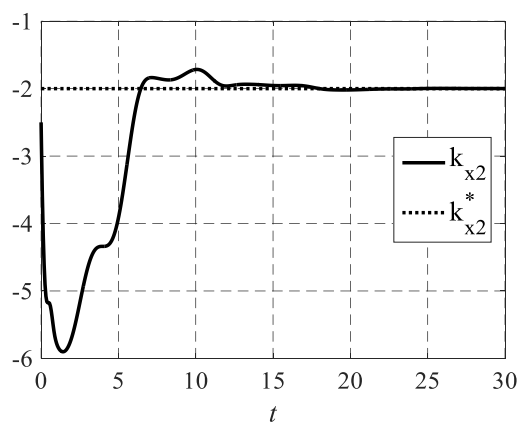


Рис. 1.54. Результаты настраиваемых k_{x2} и идеальных k_{x2}^* параметров

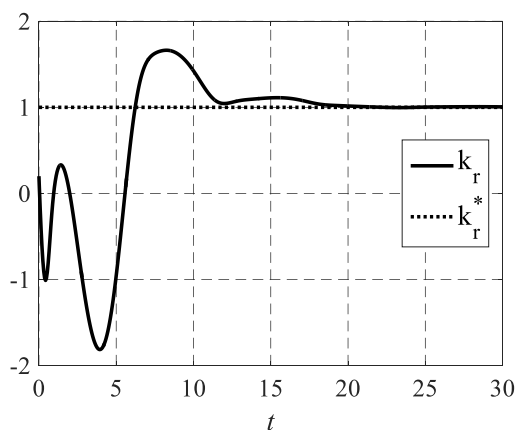


Рис. 1.55. Результаты настраиваемых k_r и идеальных k_r^* параметров

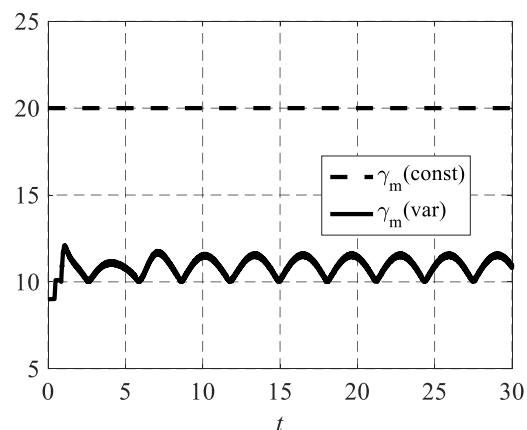


Рис. 1.56. Результаты с динамически изменяемым коэффициентом усиления

Как видно из результатов, алгоритм управления обеспечивает ограниченность траекторий замкнутой системы и идентификацию параметров. На рис. 1.56 приведены значения постоянных и переменных коэффициентов

усиления. Очевидно, что при любом $T > 0$ $\int_0^T \gamma_m d\tau < \gamma_{m-\text{const}} \cdot T$. Следовательно,

использование динамически изменяемых коэффициентов усиления релейных алгоритмов позволяет снизить энергетические затраты на управление.

1.5. Идентифицирующие свойства синтезированных алгоритмов адаптации

Рассмотрим систему, состоящую из ОУ (1.1) и явной эталонной модели (1.22). Если выполнены условия теоремы 2., то алгоритм адаптации (1.28) с учётом отклонения (1.12) $\sigma = x_2 - x_2^{virt}$ обеспечивает достижение цели управления:

- 1) замкнутая система является устойчивой по Ляпунову (все траектории системы ограничены);
- 2) $\|y(t) - f(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\sigma(t) \equiv 0$ при $t \geq t_*$.

Сформулируем дополнительную цель управления в виде

$$\begin{aligned} \|\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*\| &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \\ \|k_r - k_r^*\| &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \\ \|b_\sigma - a_{12}\| &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.53)$$

которая соответствует наличию идентифицирующих свойств у алгоритма адаптивного управления.

Выпишем уравнение ошибки $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_*$. Учитывая (1.1), (1.5), и (1.22), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}(x_2^{virt} + \sigma) - \mathbf{A}_3\mathbf{x}_3 - \mathbf{b}_3r - \mathbf{A}_*\boldsymbol{\varepsilon}_* - \mathbf{b}_\sigma\sigma = \\ &= (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_*)\mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}_* - \mathbf{A}_3)\mathbf{x}_3 + \mathbf{a}_{12}(x_2^{virt} \pm x_{2*}^{virt}) - \mathbf{b}_3r - (\mathbf{a}_{12} - \mathbf{b}_\sigma)\sigma = \\ &= (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)\mathbf{x}_1 + (k_r - k_r^*)r + (\mathbf{b}_\sigma - \mathbf{a}_{12})\sigma. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Введем обозначения $\Delta_{\mathbf{k}_x} = \mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*$, $\Delta_{k_r} = k_r - k_r^*$, $\Delta_{b_\sigma} = b_\sigma - a_{12}$. Поскольку матрицы $\mathbf{k}_x^*$, k_r^* , a_{12} постоянны, то алгоритм адаптации (1.28) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{\mathbf{k}_x} &= \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{x}_1^T \Gamma_1, \\ \dot{\Delta}_{k_r} &= -\gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} r, \\ \dot{\Delta}_{b_\sigma} &= \gamma_3 \mathbf{H} \mathbf{e} \sigma. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Рассмотрим (1.55) совместно с (1.54) и запишем в более компактной форме

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}_* \mathbf{e} + \mathbf{P} \Phi \mathbf{w}, \\ \dot{\Phi} &= -\Gamma \mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{w}^T,\end{aligned}\tag{1.56}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{12} & -\mathbf{I}_{(n-m) \times m} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & r & \sigma \end{pmatrix}^T; \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} -\Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathbf{k}_x} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{k_r} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{b_\sigma} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.57}$$

Квадратичная форма $V_1(\mathbf{e}, \mathbf{k}_x, k_r, \mathbf{b}_\sigma)$ с учетом (1.57) может быть записана в виде

$$V_1(\mathbf{e}, \Phi, b_\sigma) = 0.5 \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{e} + 0.5 \text{trace} \{ \Phi^T \Gamma^{-1} \Phi \}.\tag{1.58}$$

Так как $V_1(\mathbf{e}, \Phi, b_\sigma) > 0$ и $\dot{V}_1(\mathbf{e}, \Phi, b_\sigma) < 0$, то $\Phi(t)$ – ограничена и из (1.58) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi$ – постоянная матрица.

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\Phi} = \lim_{t \rightarrow \infty} [-\Gamma \mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{w}^T(t)] = 0.\tag{1.59}$$

Определяя траектории, вдоль которых $\dot{V} \equiv 0$ или $\mathbf{e}(t) \equiv 0$ и учитывая (1.56), получаем, что

$$\mathbf{P} \Phi \mathbf{w}(t) \equiv 0,\tag{1.60}$$

где Φ – постоянная матрица.

Так как матрица $\mathbf{P}$ имеет полный ранг, то $\Phi \mathbf{w}(t) \equiv 0$ или в более развернутом виде

$$\Phi \mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathbf{k}_x} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{k_r} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{b_\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ r \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathbf{k}_x} \mathbf{x}_1 \\ \Delta_{k_r} r \\ \Delta_{b_\sigma} \sigma \end{pmatrix} \equiv 0, \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-m} \Delta_{\mathbf{k}_x}^{ij} \mathbf{x}_1^i &\equiv 0, \\
\sum_{i=1}^l \Delta_{k_r}^{ij} r^i &\equiv 0, \quad j = \overline{1, m} \\
\sum_{i=1}^{n-m} \Delta_{b_\sigma}^{ij} \sigma^i &\equiv 0.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Если компонентами векторов $\mathbf{x}_1, r, \sigma$ являются ортогональными сигналами (линейно-независимыми функциями времени), то тождество (1.58) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbf{k}_x}^{ij} &= 0, \\
\Delta_{k_r}^{ij} &= 0, \quad \forall i, j, \\
\Delta_{b_\sigma}^{ij} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

что равносильно $\mathbf{k}_x = \mathbf{k}_x^*, k_r = k_r^*, b_\sigma = a_{12}$.

Заметим, что (1.62) справедливо в реальном скользящем режиме, т. к. в этом случае компоненты вектора $\sigma(t)$ будут отличны от нуля.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{x}_1, r, \sigma$ представляют собой векторы, состоящие из сигналов с $\max\{m-n, l\}$ различными частотами. Тогда алгоритм адаптивного управления (1.28) в реальном скользящем режиме обеспечивает достижение дополнительной цели управления (1.53).

Утверждение 1. Пусть компонентами вектора r являются периодические функции с $m-n$ различными частотами. Тогда алгоритм адаптивного управления (1.28) будет обладать идентифицирующими свойствами по настраиваемым параметрам.

Утверждение 2. Пусть сигнал σ подвержен воздействию периодического возмущения с ограниченной амплитудой ($\sigma = \bar{\sigma} + \delta_\sigma$, где δ_σ – возмущение, спектр которого содержит не менее $m-n$ частот) и компоненты вектора r есть произвольные линейно-независимые сигналы. Тогда алгоритм адаптивного управления (1.28) будет обладать идентифицирующими свойствами по настраиваемым параметрам.

При этом на выходах релейных элементов также возникают периодические функции с достаточно богатым частотным спектром, что обеспечивает сходимость $\mathbf{k}_x = \mathbf{k}_x^*$, $k_r = k_r^*$, $b_\sigma = a_{12}$.

Замечание 1.2. Дополнительное периодическое возмущение, действующее на сигнал σ , может иметь место в реальном скользящем режиме или при дискретизации алгоритма адаптивного управления. Однако при большом шаге дискретизации могут возникать существенные искажения выходного сигнала.

Замечание 1.3. Можно отказаться от настройки параметров b_σ , исключив из

$$V_3 = (\mathbf{e}, \sigma, \boldsymbol{\theta}, b_\sigma) = V_1(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}) + V_2(\sigma) + 0,5 \cdot \gamma_3^{-1} (b_\sigma^* - b_\sigma)^2$$

слагаемое $\gamma_3^{-1} (b_\sigma^* - b_\sigma)^2$ и увеличив коэффициент усиления γ релейного управления на величину $\left| b(a_{12} - b_\sigma)^T \mathbf{H} \mathbf{e} \right|$. Более того, можно исключить из уравнения эталонной модели слагаемое $b_\sigma \sigma$. Важно отметить, что в этом случае отпадает необходимость наличия в системе реального скользящего режима.

Замечание 1.4. Алгоритмы адаптивного управления с адаптацией параметров в конечной форме (1.40) не обладают идентифицирующими свойствами, поскольку отсутствует явно заданная желаемая траектория системы, а также их работоспособность доказана лишь при условии $\dot{r}(t) \in L_2(0, \infty)$.

1.6. Сравнительный анализ алгоритмов адаптивного управления линейными двухкаскадными системами с желаемой спектральной динамикой конечного каскада

В таблице 1.2. представлены синтезированные алгоритмы адаптивного управления с явной, модифицированной эталонной моделью конечного каскада, параметрами адаптации в конечной форме и динамически изменяемым коэффициентом усиления.

Таблица 1.2

Алгоритмы адаптивного управления с желаемой спектральной динамикой

№	Постановка задачи		
	ОУ $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}x_2 + bu, \\ y = (1 \ 0 \ \dots \ 0)\mathbf{x}_1. \end{cases} \quad (1.1)$	ГМ $\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_9 &= \mathbf{A}_9\mathbf{x}_9 + \mathbf{b}_9r, \\ y_9 &= (1 \ 0 \ \dots \ 0)\mathbf{x}_9, \\ \mathbf{x}_9(t) &= \boldsymbol{\varphi} \triangleq \left(f(t) \ f'_t(t) \ \dots \ f_t^{(n-1)}(t) \right)^T. \end{aligned} \quad (1.5)$	ЦУ $\begin{cases} Q(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \leq \Delta_e, \forall t \geq t_* \\ R(\sigma) = \sigma^2 \leq \Delta_\sigma, \forall t \geq t^* \end{cases} \quad (1.63)$ $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_*, \ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_9.$
1	Алгоритмы с явной эталонной моделью (ЯЭМ)		
	Эталонная модель	Алгоритмы управления	Условия и результат сходимости
		$x_2^{virt} = \mathbf{k}_x \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_9^* \boldsymbol{\varphi} + k_r r, \quad (1.10)$	$\text{rank}(\mathbf{a}_{12}) = \text{rank} \{ \mathbf{a}_{12}, \mathbf{A}_* - \mathbf{A}_{11} \}.$ (1.16): $\exists \gamma_m \geq \tilde{\gamma}_m + \tilde{\gamma}_0, \ \tilde{\gamma}_0 > 0: \ \sigma \equiv 0 \text{ при } t \geq t^*,$

	1	2	3
	ЯЭМ $\dot{\mathbf{\epsilon}}_* = \mathbf{A}_* \mathbf{\epsilon}_*, \mathbf{\epsilon}_*(0) = 0, \quad (1.7)$ $\operatorname{Re} \lambda_i^*(\mathbf{A}_*) < 0, i = \overline{1, n}.$	$\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}}_x &= -\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{\epsilon} \mathbf{x}_1^T \Gamma_1, \\ \dot{k}_r &= -\gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{\epsilon} r, \end{aligned} \quad (1.11)$ $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0, \gamma_2 > 0.$ $u = -\gamma_m \operatorname{sign}(b) \operatorname{sign}(\sigma) \quad (1.16)$ или $u = -\gamma_m \operatorname{sign}(b) \cdot \sigma, \quad (1.17)$ $\sigma = x_2 - x_2^{virt}, \gamma_m > 0.$	$t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\sigma_0)}: \ y(t) - f(t)\ \rightarrow 0,$ $\mathbf{k}_x \rightarrow \mathbf{k}_x^*, k_r \rightarrow k_r^*, (t \rightarrow \infty).$ (1.17): $\exists \gamma_m \geq \bar{\gamma}_m$: ЦУ (1.63) вып.; $\Rightarrow \ y - f\ \leq \Delta, \forall t \geq t_*; \ y(t) - f(t)\ \rightarrow 0,$ $\mathbf{k}_x \rightarrow \mathbf{k}_x^*, k_r \rightarrow k_r^*, (t \rightarrow \infty, \gamma_m \rightarrow \infty).$ $V(\bullet) = Q(\mathbf{e}) + R(\sigma) + \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 +$ $+ \left\{ (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)^T \right\}.$
2	Алгоритмы с модифицированной эталонной моделью (МЭМ)		
	МЭМ: $\dot{\mathbf{\epsilon}}_* = \mathbf{A}_* \mathbf{\epsilon}_* + \mathbf{b}_\sigma \sigma, \quad (1.12)$ $\mathbf{\epsilon}_*(0) = \mathbf{\epsilon}_*^0,$ $\mathbf{b}_\sigma = (0 \dots 0 b_\sigma)^T, \sigma = x_2 - x_2^{virt},$ $\operatorname{Re} \lambda_i^*(\mathbf{A}_*) < 0, i = \overline{1, n}.$	$x_2^{virt} = \mathbf{k}_x \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_\varphi^* \boldsymbol{\varphi} + k_r r, \quad (1.27)$ $\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}}_x &= -\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{\epsilon} \mathbf{x}_1^T \Gamma_1, \\ \dot{k}_r &= -\gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{\epsilon} r, \end{aligned} \quad (1.28)$ $\dot{\mathbf{b}}_\sigma = \gamma_3 \mathbf{H} \mathbf{\epsilon} \sigma,$ $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0, \gamma_i > 0.$	$\operatorname{rank}(\mathbf{a}_{12}) = \operatorname{rank} \{ \mathbf{a}_{12}, \mathbf{A}_* - \mathbf{A}_{11} \} =$ $= \operatorname{rank} \{ \mathbf{b}_\sigma, \mathbf{a}_{12} \}.$ (1.29): $\exists \gamma_m \geq \tilde{\gamma}_m + \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_0 > 0$: $\sigma \equiv 0$ при $t \geq t^*$, $t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\sigma_0)}: \ y(t) - f(t)\ \rightarrow 0, \mathbf{k}_x \rightarrow \mathbf{k}_x^*,$ $k_r \rightarrow k_r^*, \mathbf{b}_\sigma \rightarrow \mathbf{b}_\sigma^* = \mathbf{a}_{12} \quad (t \rightarrow \infty).$

	1	2	3
		$u = -\gamma_m \text{sign}(b) \text{sign}(\sigma) \quad (1.29)$ или $u = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \sigma, \quad (1.30)$ $\gamma_m > 0.$	(1.30): $\exists \gamma_m \geq \bar{\gamma}_m$: ЦУ (1.63) вып.; $\Rightarrow \ y - f\ \leq \Delta, \forall t \geq t_*$; $\ y(t) - f(t)\ \rightarrow 0$, $\mathbf{k}_x \rightarrow \mathbf{k}_x^*, k_r \rightarrow k_r^*, \mathbf{b}_\sigma \rightarrow \mathbf{b}_\sigma^* = \mathbf{a}_{12}$, $(t \rightarrow \infty, \gamma_m \rightarrow \infty)$. $V(\bullet) = Q(\mathbf{e}) + R(\sigma) +$ $+ \left\{ (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \Gamma_1^{-1} (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)^T \right\} +$ $+ \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 + 0,5 \cdot \gamma_3^{-1} (\mathbf{b}_\sigma^* - \mathbf{b}_\sigma)^T (\mathbf{b}_\sigma^* - \mathbf{b}_\sigma)$.
3	Управление с адаптацией в конечной форме и ЯЭМ		
	$\dot{\mathbf{e}}_* = \mathbf{A}_* \mathbf{e}_*, \mathbf{e}_*(0) = 0, \quad (1.7)$ $\text{Re} \lambda_i^*(\mathbf{A}_*) < 0, i = \overline{1, n}.$	$x_2^{\text{virt}} = \mathbf{k}_x \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_9^* \boldsymbol{\varphi} + k_r r, \quad (1.39)$ $\mathbf{k}_x = \mathbf{k}_x^0 - \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} \mathbf{x}_1^T \Gamma_1, \quad (1.40)$ $k_r = k_r^0 - \gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{e} r,$ $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0, \gamma_2 > 0.$ $u = -\gamma_m \text{sign}(b) \text{sign}(\sigma) \quad (1.41)$ или $u = -\gamma_m \text{sign}(b) \cdot \sigma, \quad (1.42)$ $\gamma_m > 0, \sigma = x_2 - x_2^{\text{virt}}$	$\text{rank}(\mathbf{a}_{12}) = \text{rank} \{ \mathbf{a}_{12}, \mathbf{A}_* - \mathbf{A}_{11} \}.$ (1.41): $\exists \gamma_m \geq \tilde{\gamma}_m + \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_0 > 0$: $\exists \gamma_i \geq \tilde{\gamma}_i$: $\sigma \equiv 0$ при $t \geq t^*, t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\sigma_0)}$, $\mathbf{e} \rightarrow 0, \mathbf{x}_1 \rightarrow \boldsymbol{\varphi}, (t \rightarrow \infty, \Gamma_1 \rightarrow 0, \gamma_2 \rightarrow 0)$. (1.42): $\exists \gamma_m \geq \bar{\gamma}_m$: ЦУ (1.63) вып.; $\Rightarrow \ y - f\ \leq \Delta, \forall t \geq t_*$; $\ y(t) - f(t)\ \rightarrow 0$, $(t \rightarrow \infty, \gamma_m \rightarrow 0, \Gamma_1 \rightarrow 0, \gamma_2 \rightarrow 0)$. $V(\bullet) = Q(\mathbf{e}) + R(\sigma)$.

	1	2	3
	Алгоритм с динамически изменяемый коэффициент усиления и ЯЭМ		
4	$\dot{\mathbf{\epsilon}}_* = \mathbf{A}_* \mathbf{\epsilon}_*, \mathbf{\epsilon}_*(0) = 0, \quad (1.7)$ $\operatorname{Re} \lambda_i^*(\mathbf{A}_*) < 0, i = \overline{1, n}.$	$x_2^{virt} = \mathbf{k}_x \mathbf{x}_1 + \mathbf{k}_r^* \boldsymbol{\varphi} + k_r r, \quad (1.44)$ $\dot{\mathbf{k}}_x = -\mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{\epsilon} \mathbf{x}_1^T \boldsymbol{\Gamma}_1, \quad (1.45)$ $\dot{k}_r = -\gamma_2 \mathbf{a}_{12}^T \mathbf{H} \mathbf{\epsilon} r,$ $\boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_1^T > 0, \gamma_2 > 0.$ $u = -\gamma_m \operatorname{sign}(b) \operatorname{sign}(\sigma), \quad (1.46)$ γ_m реализуется по алгоритму (1.47), (1.48), $\sigma = x_2 - x_2^{virt}.$	$\operatorname{rank}(\mathbf{a}_{12}) = \operatorname{rank} \{ \mathbf{a}_{12}, \mathbf{A}_* - \mathbf{A}_{11} \}.$ $(1.46): k_i > 0, i = \overline{1, 3}, \sigma \equiv 0 \text{ при } t \geq t_r,$ $t_r \leq \frac{2R(\sigma_0)^{1/2}}{\beta}, \beta = \sqrt{2} \min \{ \beta_\sigma, \beta_k \sqrt{\gamma} \},$ $\ y(t) - f(t)\ \rightarrow 0, \mathbf{k}_x \rightarrow \mathbf{k}_x^*, k_r \rightarrow k_r^* (t \rightarrow \infty).$ $V(\bullet) = Q(\mathbf{e}) + R(\sigma) +$ $+ \left\{ (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*) \boldsymbol{\Gamma}_1^{-1} (\mathbf{k}_x - \mathbf{k}_x^*)^T \right\} +$ $+ \gamma_2^{-1} (k_r - k_r^*)^2 + \gamma^{-1} (\gamma_m - \gamma_m^*)^2.$

1.7. Выводы по главе 1

В разделе 1.1 представлена методика синтеза и алгоритмы адаптивного управления с желаемой спектральной динамикой конечного каскада. Алгоритмы обеспечивают ограниченность траекторий замкнутой системы и заданную точность воспроизведения желаемого выхода и его производных вплоть до порядка на единицу меньше размерности вектора фазовых переменных выходного каскада. По предельным свойствам релейный алгоритм с настраиваемым многообразием скольжения превосходит гладкий алгоритм управления, обеспечивая возникновение настраиваемого скользящего режима за конечный интервал времени и асимптотическую сходимость состояния выходного каскада к желаемой выходной динамике и её производным. Исследована устойчивость замкнутой системы с синтезированными алгоритмами управления, получены оценки качества достижения цели управления. Приведённый пример иллюстрирует методику синтеза, а результаты моделирования подтверждают работоспособность и качество синтезированных алгоритмов.

В разделе 1.2 представлена методика синтеза и алгоритмы адаптивного управления с модифицированной эталонной моделью конечного каскада. Модифицированная эталонная модель позволяет повышать точности желаемой динамики слежения для конечного каскада при ограниченности траекторий замкнутой системы и снизить энергические затраты на управление.

В разделе 1.3 для двухкаскадных линейных объектов представлена методика синтеза и алгоритмы адаптивного управления с адаптацией параметров многообразия скольжения в конечной (недифференциальной) форме на основе скоростного биградиента. Алгоритмы адаптации в конечной форме обеспечивает быстрое парирование координатных возмущений (ошибки слежения) конечного каскада.

В разделе 1.4 для двухкаскадных линейных систем методом скоростного биградиента синтезирован релейный алгоритм управления с настраиваемыми многообразиями (в дифференциальной форме) и динамически изменя-

емым коэффициентом усиления. Синтезированный алгоритм обеспечивает экономию энергетических затрат на управление и обладает идентифицирующими свойствами.

В разделе 1.5 алгоритмы адаптивного управления с адаптацией параметров *в дифференциальной форме* обладают идентифицирующими свойствами. А алгоритмы адаптивного управления с адаптацией параметров *в конечной форме* не обладают идентифицирующими свойствами.

В разделе 1.6 представлен сравнительный анализ.

ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНООСНЫМ ВИБРАЦИОННЫМ ГИРОСКОПОМ

В главе 2 диссертационной работы рассматривается задача адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом в режиме измерения угловой скорости вращения основания и параметрической неопределённости параметров. В целях повышения астатизма системы (или учёта динамики привода) и обеспечения гладкости управляющих сил по входам вводятся дополнительные интеграторы. Для системы с интеграторами методом скоростного биградиента [22] синтезируется семейство гладких, релейных и комбинированных алгоритмов с настраиваемым многообразием с явной [26, 27, 86] и модифицированной [28, 88] эталонной моделью сходимости траекторий механической подсистемы вибрационного гироскопа (выходной каскад) к траектории генерирующей модели. Особенностью линейной генерирующей модели является наличие двух пар мнимых полюсов. Рассмотрена задача синтеза алгоритмов настраиваемого скользящего режима с динамически изменяемыми коэффициентами усиления по релейному управлению [40].

Приводится математическая модель одноосного вибрационного гироскопа, результаты разработанных в главе 1 методик синтеза алгоритмов, условия применимости алгоритмов, анализ устойчивости адаптивной системы управления и результаты моделирования. Приведённые в главе теоремы можно рассматривать как следствия соответствующих теорем главы 1. Условия теоремы носят достаточный характер и могут быть ослаблены в ходе дальнейших исследований. Поэтому доказательство теорем методом функции Ляпунова приведено в приложении А.

2.1. Постановка задачи управления одноосным вибрационным гироскопом в условиях параметрической неопределённости

В данном разделе рассмотрены физические основы функционирования вибрационных гироскопов, приведены обзор публикаций, классификация

данных устройств. Обоснован выбор математической модели одноосного вибрационного гироскопа и формализована задача синтеза системы управления вибрационным гироскопом.

2.1.1. Физические основы функционирования развития одноосного вибрационного гироскопа

Микорозлектромеханические (МЭМС) вибрационные гироскопы широко используются датчики для измерения угловой скорости во многих областях применения, таких как навигация, самонаведения, и стабилизация управления и представляют собой плоские миниатюрные конструкции с габаритными размерами от 10 мкм (рис. 2.1).

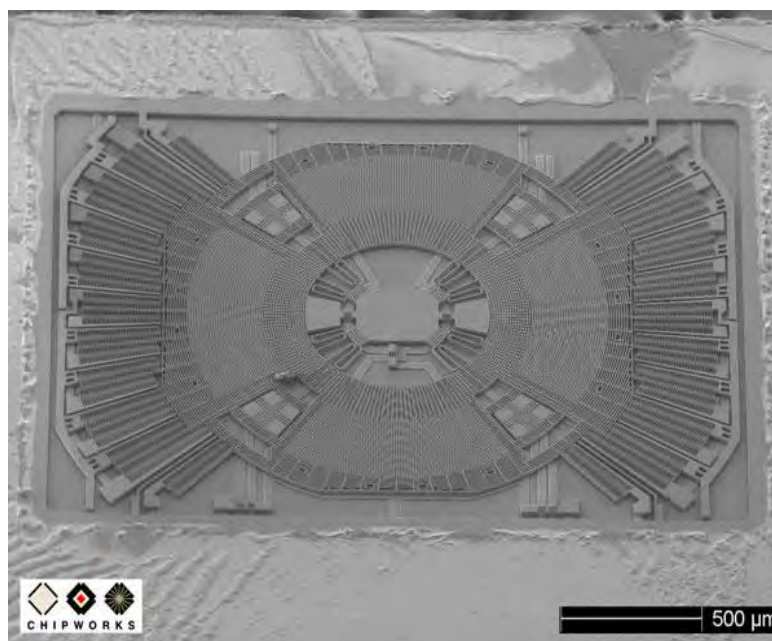


Рис. 2.1. Вибрационный гироскоп ST Microelectronics LYPR 540AH [7]

Основной механический компонент гироскопа представляет собой чувствительную массу с двумя степенями свободы, способную вращаться в двух перпендикулярных направлениях на плоскости под действием упругих сил, сил трения и внешней вынуждающей силы. При этом в гироскопе происходит передача энергии от одной оси (оси приложения силы) к другой (ось из-

мерения) через ускорение Кориолиса. Одним из способов определения угловой скорости вращения основания вибрационного гироскопа является вычисление отношения амплитуды вынужденных гармонических колебаний по оси Ox (ось приложения силы) к амплитуде возбужденных под действием силы Кориолиса колебаний по Oy (ось датчика) [5].

В работах [4, 17] дан исторический обзор развития вибрационных различных типов гироскопов. Первым вибрационным гироскопом принято считать гиротрон, разработанный в начале 50-х годов прошлого столетия [52].

Бурное развитие транспорта в середине XX века привело к существенному повышению точностных требований, предъявляемых к навигационным приборам. Это послужило причиной широких исследований и разработок по совершенствованию гироскопических приборов, являющихся, как правило, Датчиками угловых движений транспортных средств. К настоящему времени совершенствование гироскопов с шарикоподшипниковыми опорами, по-видимому, достигло своего предела. Для решения задачи повышения точности инерциальной навигации, стабилизации, управления и наведения в 50-х годах начались работы по созданию нового поколения инерциальных чувствительных элементов – поплавковых гироскопов.

Дальнейшее развитие авиации, ракетной и космической техники поставило на повестку дня задачу снижения габаритов, массы, потребляемой мощности, повышения точности и снижения времени готовности. Несмотря на хорошие точностные характеристики, поплавковые гироскопы были сложны в изготовлении и в силу особенностей своей конструкции перестали удовлетворять поставленным требованиям. Попытки решить эту задачу заканчивались, как правило, разработкой чрезвычайно дорогих приборов [17].

Современный уровень развития микроэлектронных технологий массового изготовления позволяет производить МЭМС вибрационные гироскопы в большом количестве, сочетающие в себе малые габаритные размеры и массу, а также низкую стоимость с приемлемой точностью определения угловой скорости [38].

2.1.2. Классификация основных видов вибрационных гироскопов

Вибрационные гироскопы объединяют устройства, различные по характеру собственного движения чувствительного элемента и принципу действия, в которых возникающий момент (сила) вызывает отклонения чувствительного элемента относительно основания, совершающего переносное движение. Отличительным признаком вибрационных гироскопов является связь чувствительного элемента с основанием, на котором он установлен.

Существующие ВГ подразделяют на роторные вибрационные гироскопы (РВГ) и осцилляторные вибрационные гироскопы (ОВГ) [4] (рис. 2.2).

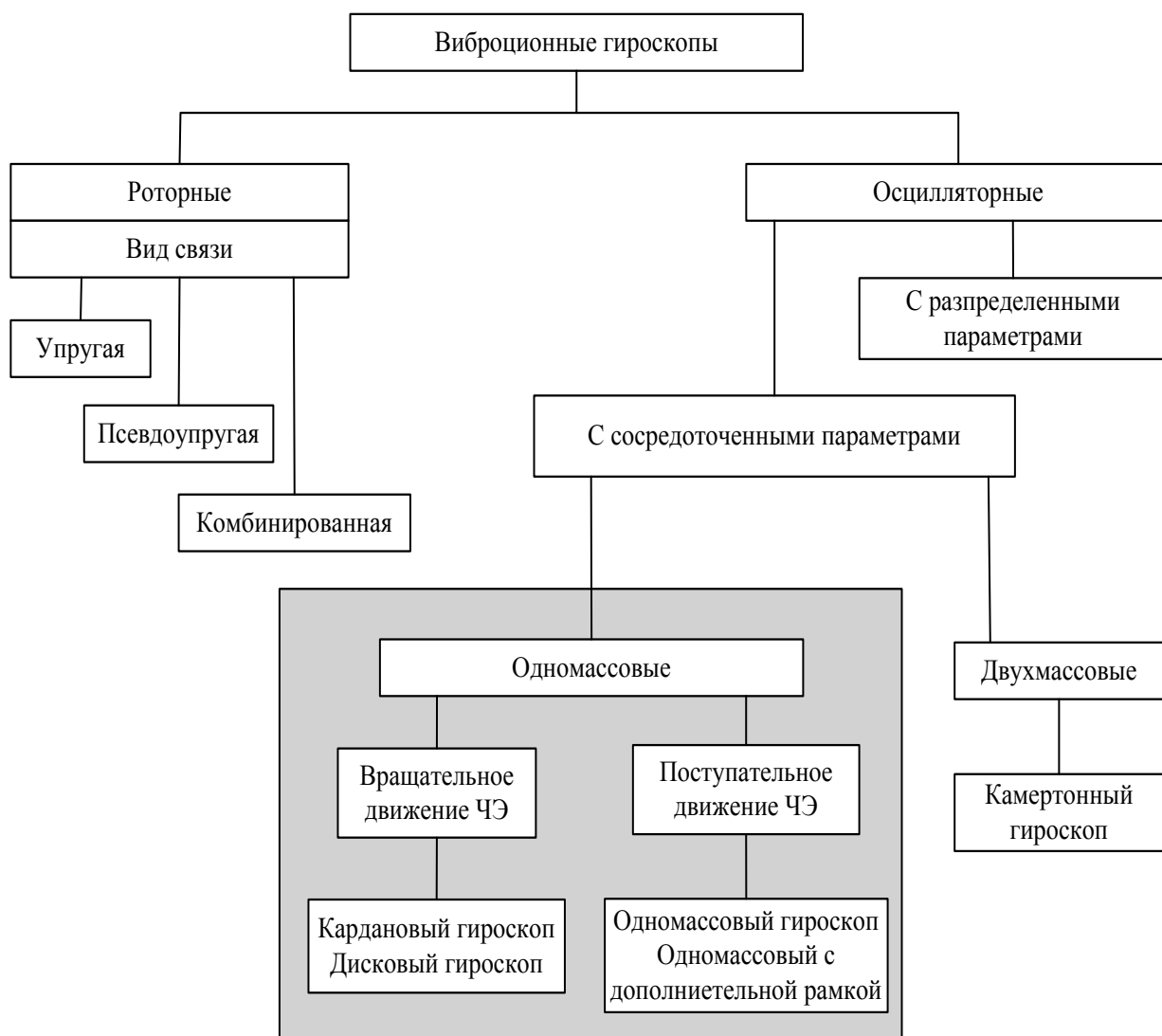


Рис. 2.2. Классификация вибрационных гироскопов

В основу такой классификации положен признак, определяемый характером основного движения носителя кинетического момента (чувствительного элемента). В РВГ таким основным движением является собственное вращение ротора (чувствительного элемента), в ОВГ – колебательное движение чувствительного элемента (массы).

Как показано на рис. 2.2, у роторных вибрационных гироскопов различают следующие виды связи: упругую, псевдоупругую и комбинированную. Принадлежность связи к одному из этих видов определяется следующим математическим признаком: если в уравнениях движения чувствительного элемента РВГ, записанных по отношению к осям Резаля, позиционный член не является функцией угловой скорости собственного вращения гироскопа, то связь является упругой; в том случае, когда указанная функциональная зависимость существует связь считается псевдоупругой; при сочетании обоих видов имеет место комбинированная связь.

Осцилляторные вибрационные гироскопы можно подразделить на два вида: ОВГ с сосредоточенными параметрами, ОВГ с распределенными параметрами. К первому виду относятся такие ВГ, конструкция которых допускает выделение сосредоточенной массы и сосредоточенного упругого элемента, что в итоге позволяет характеризовать движение чувствительного элемента гироскопа обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Второй вид ОВГ включает в себя такие гироскопы, для которых указанное допущение невозможно, в силу чего движение гироскопа должно отображаться дифференциальными уравнениями в частных производных.

Осцилляторные вибрационные гироскопы можно подразделить на два вида: гироскопы с сосредоточенными и с распределенными параметрами.

Покажем в этой классификации место существующих МЭМС вибрационных гироскопов по отношению к остальным вибрационным гироскопам. В рассмотренной базовой классификации, существующие МЭМС вибрационные гироскопы относятся к осцилляторным вибрационным гироскопам с сосредоточенными параметрами. По количеству инерционных масс в составе

чувствительного элемента, которые совершают вторичные колебания, гироскопы могут быть двухмассовыми (камертонный гироскоп) и одномассовыми (кардановый, дисковый, одномассовый с дополнительной рамкой и без нее). В свою очередь одномассовые гироскопы отличаются по характеру движения чувствительного элемента: вращательное и поступательное. На основании перечисленных признаков расширенная классификация вибрационных гироскопов может быть представлена схематически, как показано на рис. 2.2.

Динамика роторных вибрационных гироскопов в настоящее время достаточно хорошо изучена [3, 10, 11, 32, 33]. Чувствительным элементом роторных гироскопов является диск, совершающий угловые колебания вокруг своей оси. В такой конструкции амплитуда колебаний по выходной оси гироскопа пропорциональна угловой скорости основания.

К осцилляторным вибрационным гироскопам с распределенными параметрами относятся различные волновые гироскопы, среди которых широкое распространение получили твердотельные волновые гироскопы.

Кроме этого ведутся исследования по гироскопам на поверхностных и объемных акустических волнах.

Как следует из приведенной на рис. 2.2 классификации, все современные МЭМС гироскопы, за исключением камертонного, относятся к одномассовым осцилляторным вибрационным гироскопам с сосредоточенными параметрами.

Это объясняется тем, что относительная простота конструкции одномассовых гироскопов предопределяет большие перспективы с точки зрения миниатюризации. В особенности это касается гироскопов с поступательными колебаниями чувствительного элемента.

Среди них наиболее популярны на сегодняшний день вибрационные гироскопы, основанные на конденсаторном принципе (рис. 2.3). Подвижная часть системы — классический чувствительный элемент на подвесе. При наличии ускорения ЧЭ смещается относительно неподвижной части МЭМС вибрационного гироскопа.

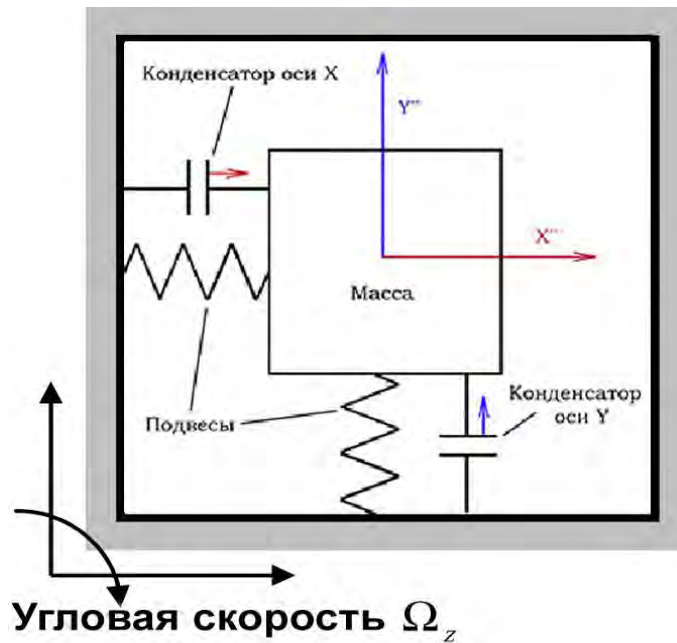


Рис. 2.3. Принцип работы конденсаторного вибрационного гироскопа [7]

Обкладка конденсатора, прикрепленная к чувствительному элементу, смещается относительно обкладки на неподвижной части. Емкость меняется, при неизменном заряде меняется напряжение — это изменение можно измерить и рассчитать смещение ЧЭ. Принципиальная электрическая схема вибрационного гироскопа конденсаторного типа приведена на рис. 2.4.

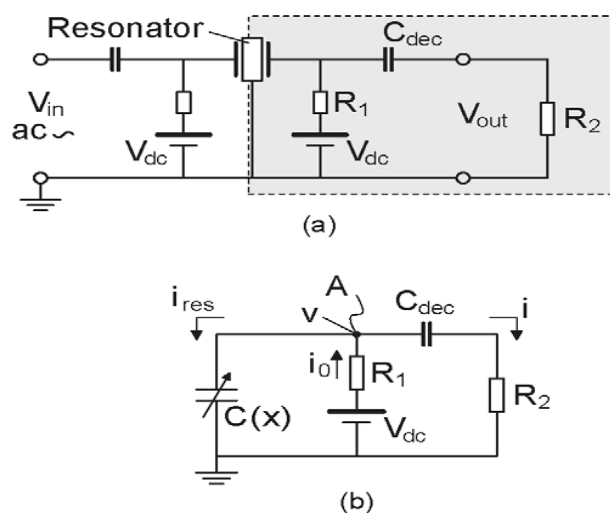


Рис. 2.4. Принципиальная электрическая схема конденсаторного вибрационного гироскопа

Менее популярны вибрационные гироскопы, использующие иные принципы. Например, основанный на пьезоэффекте (рис. 2.5). Вместо смещения обкладок конденсатора, в вибрационных гироскопах такого типа происходит давление чувствительного элемента на пьезокристалл. Основной принцип тот же, что и в пьезозажигалках под воздействием деформации пьезоэлемент вырабатывает ток. Из значения напряжения, зная параметры системы, можно найти силу, с которой ЧЭ давит на кристалл и, соответственно, рассчитать его смещение.

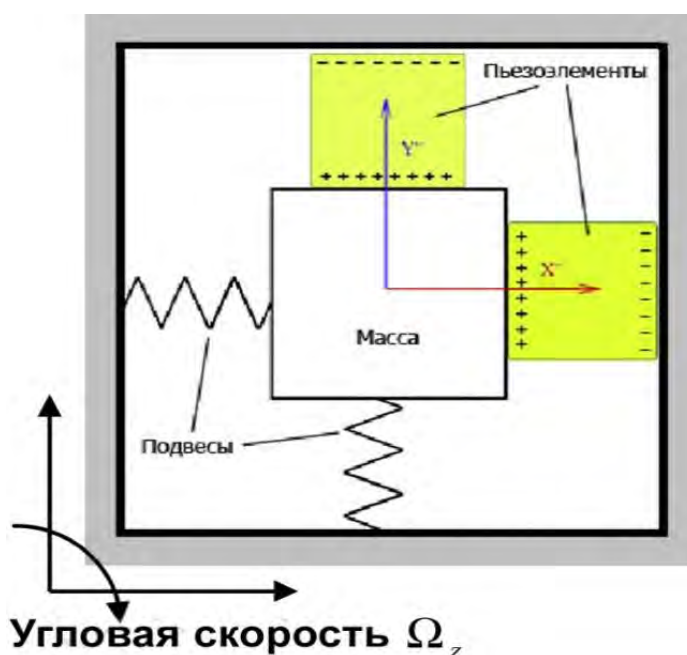


Рис. 2.5. Принцип работы пьезоэлектрического вибрационного гироскопа [7]

Существуют и другие, более экзотические типы вибрационных гироскопов. Например, термальные датчики ускорения. В них в качестве чувствительного элемента используется горячий пузырек воздуха. При движении пузырек отклоняется от центра системы, это отслеживается датчиками температуры. Чем дальше сместился пузырек, тем больше измеряемое ускорение.

2.1.3. Математическая модель одноосного вибрационного гироскопа

Проанализировав опубликованные работы можно сделать вывод, что наиболее перспективной из современных конструкций МЭМС вибрационных гироскопов является одномассовый одноосный МЭМС вибрационный гироскоп.

Рассмотрим подробнее математическую модель такого вибрационного гироскопа, динамику погрешности измерений и формализуем задачу синтеза системы управления данным вибрационным гироскопом.

В качестве одноосного вибрационного гироскопа будем рассматривать упрощенную механическую модель одноосного вибрационного гироскопа [5, 59, 85], изображенную на рис. 2.6.

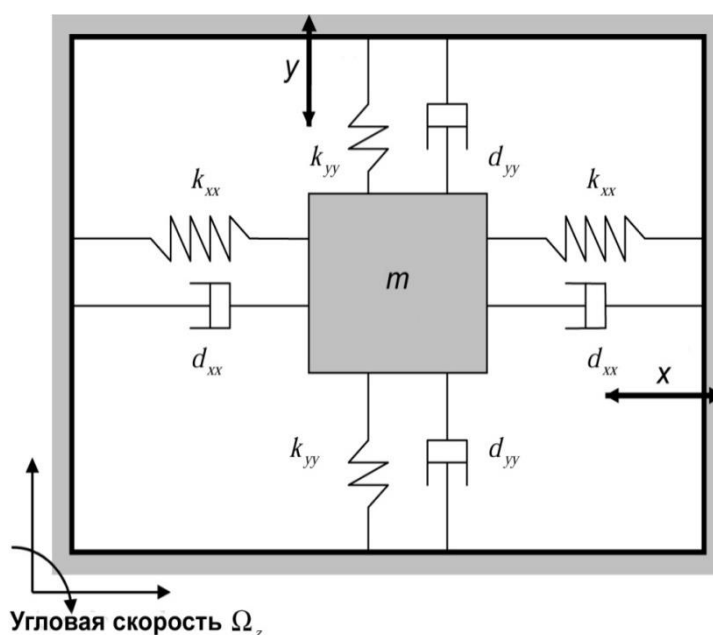


Рис. 2.6. Упрощенная модель одноосного вибрационного гироскопа

Жестко связанная с гироскопом система координат B вращается относительно инерциальной системы A с абсолютной угловой скоростью Ω_z (рис. 2.7).

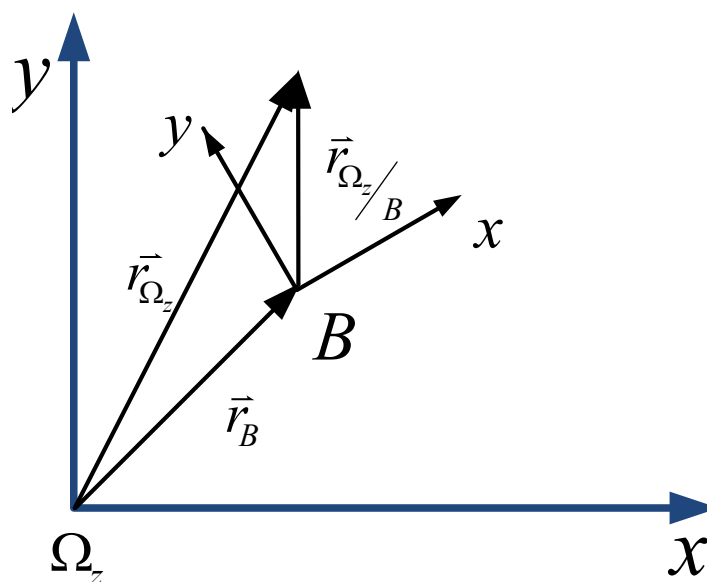


Рис. 2.7. Системы координат

Чувствительный элемент, в данном случае чувствительная масса вибрационного гироскопа — материальная точка массы m , совершающая колебания в плоскости Bx под действием упругих сил, действующих в направлениях осей Bx и By соответственно, сил вязкого трения, а также внешней электростатической силы, действующей в плоскости Bxy .

Ось Bz дополняет систему координат $Bxyz$ до правой.

Принцип работы вибрационного гироскопа в режиме измерения угловой скорости заключается в том, что чувствительный элемент вибрационного гироскопа совершает колебательные движения относительно оси первичных колебаний (колебаний, возбуждаемых внешней электростатической силой), при воздействии угловой скорости по оси чувствительности, возникает момент Кориолиса, вызывающий колебания относительно оси, перпендикулярной первым двум (ось вторичных колебаний).

Амплитуда вторичных колебаний, пропорциональна действующей угловой скорости вращения основания вибрационного гироскопа.

Вектор $\vec{r}_A$ определяет положение чувствительной массы в инерциальной системе координат A , $\vec{r}_B$ — вектор, определяющий мгновенное расположение вращающейся системы координат B , относительно системы координат

A ; вектор $\vec{r}_{A/B}$ определяет положение чувствительной массы во вращающейся системе координат B .

Таким образом

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} = \vec{r}_B + xi + yj + zk.$$

Считаем, что:

- гироскоп вращается с постоянной угловой скоростью Ω_z на достаточно большом временном интервале;
- центробежные силы $m\Omega_z^2 x$, $m\Omega_z^2 y$ считаем незначительными;
- гироскоп вращается только вокруг оси z .

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k + x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt} \quad (2.1)$$

Подставляя $\frac{di}{dt} = \Omega_z \times i$, $\frac{dj}{dt} = \Omega_z \times j$, $\frac{dk}{dt} = \Omega_z \times k$ в (2.1), получим

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_B + \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k + x(\Omega_z \times i) + y(\Omega_z \times j) + z(\Omega_z \times k) = \\ &= \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} + \Omega_z \times \vec{r}_{A/B} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ — векторы скорости, относительно инерциальной системы отсчета, $\vec{v}_{A/B} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k$ — вектор скорости, относительно вращающейся системы отсчета.

$$\begin{aligned} \frac{d(\Omega_z \times \vec{r}_{A/B})}{dt} &= \frac{d[\Omega_z + (xi + yj + zk)]}{dt} = \\ &= \frac{d\Omega_z}{dt} \times (xi + yj + zk) + \Omega_z \left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k + x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt} \right) = \\ &= \frac{d\Omega_z}{dt} \times \vec{r}_{A/B} + \Omega_z \times (\vec{v}_{A/B} + \Omega_z \times \vec{r}_{A/B}) = \\ &= \frac{d\Omega_z}{dt} \times \vec{r}_{A/B} + \Omega_z \times \vec{v}_{A/B} + \Omega_z \times \Omega_z \times \vec{r}_{A/B}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}_{A/B}}{dt} &= \frac{d\left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k + \\
&+ \frac{dx}{dt} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dj}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dk}{dt} = \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k + \frac{dx}{dt} \cdot (\Omega_z \times i) + \frac{dy}{dt} \cdot (\Omega_z \times j) + \frac{dz}{dt} \cdot (\Omega_z \times k) = \\
&= \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k + \Omega_z \times \frac{dx}{dt}i + \Omega_z \times \frac{dy}{dt}j + \Omega_z \times \frac{dz}{dt}k = \vec{a}_{A/B} + \Omega_z \times \vec{v}_{A/B}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Дифференцируя (2.2) и подставляя (2.3), (2.4) получим

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} + 2\Omega_z \times \vec{v}_{A/B} + \frac{d\Omega_z}{dt} \times \vec{r}_{A/B} + \Omega_z \times (\Omega_z \times \vec{r}_{A/B}), \tag{2.5}$$

где $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ — ускорение, относительно инерциальной системы отсчета,

$\vec{a}_{A/B} = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k$ — ускорение, относительно вращающейся системы отсчета. Умножив (2.5) на массу m , получим

$$m\vec{a}_A = m\vec{a}_B + m\vec{a}_{A/B} + 2m\Omega_z \times \vec{v}_{A/B} + m\left(\frac{d\Omega_z}{dt} \times \vec{r}_{A/B}\right) + m\Omega_z \times (\Omega_z \times \vec{r}_{A/B}),$$

где $2m\Omega_z \times \vec{v}_{A/B}$ — сила Кориолиса, а $m\Omega_z \times (\Omega_z \times \vec{r}_{A/B})$ — центробежная сила.

Силу Кориолиса, действующую на чувствительную массу вдоль оси x представим в виде

$$F_{кор_x} = 2m\Omega_z k \times \dot{y}j = 2m\Omega_z \dot{y}i.$$

Силу Кориолиса, действующую на чувствительную массу вдоль оси y представим в виде

$$F_{кор_y} = 2m\Omega_z k \times \dot{x}i = 2m\Omega_z \dot{x}j.$$

Используя $-i = k \times (k \times i)$, центробежную силу, действующую на чувствительную массу вдоль оси x представим в виде

$$F_{цб_x} = m\Omega_z k \times (\Omega_z k \times xi) = -m\Omega_z^2 xi.$$

Используя $-j = k \times (k \times j)$, центробежную силу, действующую на чувствительную массу вдоль оси y представим в виде

$$F_{\text{цб}_y} = m\Omega_z k \times (\Omega_z k \times yj) = -m\Omega_z^2 yj.$$

Таким образом, из вышесказанного следует, что математическая модель одноосного вибрационного гироскопа, описывается уравнениями:

$$m\ddot{x} + d_{xx}\dot{x} + d_{xy}\dot{y} + k_{xx}x + k_{xy}y = u_x + 2m\Omega_z\dot{y}, \quad (2.6)$$

$$m\ddot{y} + d_{xy}\dot{x} + d_{yy}\dot{y} + k_{xy}x + k_{yy}y = u_y - 2m\Omega_z\dot{x}, \quad (2.7)$$

где m — масса чувствительного элемента,

k_{xx}, k_{xy}, k_{yy} — коэффициенты упругости подвеса,

d_{xx}, d_{xy}, d_{yy} — коэффициенты демпфирования подвеса,

u_x, u_y — управляющие воздействия (внешние силы, действующие в направлении осей Bx и By соответственно),

Ω_z — угловая скорость вращения основания вибрационного гироскопа.

Введем обозначения $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Omega}_z = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z \\ \Omega_z & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{xy} & d_{yy} \end{pmatrix}, \mathbf{K}_a = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{xy} & k_{yy} \end{pmatrix}.$$

Тогда математическая модель в векторной форме примет вид

$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{\mathbf{D}}{m}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\mathbf{K}_a}{m}\mathbf{q} = \frac{\mathbf{u}}{m} - 2\mathbf{\Omega}_z\dot{\mathbf{q}}.$$

На практике величина ω порядка 10000 Гц. В этом случае для повышения точности вычислений лучше перейти к приведенному времени $t^* = \omega_0 t$.

$$\frac{\ddot{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}_0} + \frac{\mathbf{D}}{m\omega_0}\frac{\dot{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}_0} + \frac{\mathbf{K}_a}{m\omega_0^2}\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{q}_0} = \frac{\mathbf{u}}{m\omega_0^2\mathbf{q}_0} - 2\frac{\mathbf{\Omega}}{\omega_0}\frac{\dot{\mathbf{q}}}{\mathbf{q}_0}.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{q}^* = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{q}_0}, \mathbf{d}_{xy}^* = \frac{\mathbf{d}_{xy}}{m\omega_0}, \mathbf{\Omega}^* = \frac{\mathbf{\Omega}}{\omega_0}, u_x^* = \frac{u_x}{m\omega_0^2\mathbf{q}_0}, u_y^* = \frac{u_y}{m\omega_0^2\mathbf{q}_0},$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_{xx}}{m\omega_0^2}}, \omega_y = \sqrt{\frac{k_{yy}}{m\omega_0^2}}, \omega_{xy} = \frac{k_{xy}}{m\omega_0^2}.$$

Игнорируя (*) для простоты обозначений, представим (2.6) и (2.7) как

$$\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_b\mathbf{q} = \mathbf{u} - 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{K}_b = \begin{pmatrix} \omega_x^2 & \omega_{xy} \\ \omega_{xy} & \omega_y^2 \end{pmatrix}$.

2.1.4. Анализ влияния конструктивных параметров [5, 17, 47, 60, 61, 69, 74, 97]

Принцип действия МЭМС вибрационного гироскопа в режиме измерения угловой скорости движения его основания заключается в воздействии Кориолисова момента на вибрирующую инерционную массу (чувствительный элемент).

Чувствительный элемент такого гироскопа совершает колебательные движения относительно оси первичных колебаний, при воздействии угловой скорости по оси чувствительности, возникает момент Кориолиса, вызывающий колебания относительно оси, перпендикулярной первым двум (ось вторичных колебаний).

Амплитуда вторичных колебаний, модулированных частотой первичных колебаний, пропорциональна угловой скорости вращения основания вибрационного гироскопа.

Колебания чувствительного элемента по осям первичных и вторичных колебаний могут описываться как колебания двух осцилляторов, связанных между собой некоторой функциональной зависимостью, соответственно первичного осциллятора и вторичного осциллятора.

В силу возможных погрешностей изготовления вибрационного гироскопа, например геометрии самого чувствительного элемента и его подвеса, первичные и вторичные колебания могут оказывать взаимное влияние друг на друга. Кроме того, каждое из этих колебаний тем или иным образом связано с корпусом, что приводит к взаимному влиянию вибраций корпуса и чувствительного элемента.

Описанная выше модель оказывается чувствительной к малым вариациям параметров системы [5, 47, 97], также в процессе работы возникают неустойчивые ветви резонансных кривых, срывы и скачки амплитуд и частот колебаний чувствительных элементов.

Чувствительность (добротность) МЭМС вибрационного гироскопа определяется добротностью колебаний чувствительного элемента гироскопа, а также рассогласованием частот первичных и вторичных колебаний. Для получения максимальной чувствительности вибрационный гироскоп должен иметь одинаковые частоты по обеим осям (резонансная настройка).

Обеспечить равенство мод первичных и вторичных колебаний технологическими способами очень сложно и приводит к ухудшению массогабаритных характеристик вибрационного гироскопа и увеличению его стоимости.

Поэтому эффективным путем повышения чувствительности виброгироскопа и, как следствие, обеспечение высокой точности измерения угловой скорости вращения основания является использование системы управления вибрационным гироскопом в условиях параметрической неопределённости.

2.1.5. Обзор методов адаптивного управления вибрационным гироскопом

Теоретические основы вибрационных гироскопов изложены Л. Д. Лисовским, Е.Л. Смирновым, П. Сейвет, Л.З. Новиковым, Л.И. Брозгулем, В.А. Матвеевым, М.А. Павловским, Г.М. Виноградовым, А.В. Збруцким, Ю.К. Жбановым, В.Я. Распоповым и др. [4, 19, 51]. Обзоры современного состояния теории и перспективы развития МЭМС гироскопы приводятся в работах [2, 8, 9, 14 – 16, 21, 57].

Леланд предложил адаптивный регулятор для МЭМС устройств с разомкнутым контуром, которое настраивает частоту колебаний в соответствие заданной эталонной частотой колебаний [80].

Этот подход имеет определенные преимущества по сравнению с фазовой автоподстройкой частоты, которая настраивает частоту входного сигнала так, чтобы она соответствовала эталонной резонансной частоте, которая, в отличие от естественной резонансной частоты устройства, не меняется во времени.

Леланд ввел адаптивный регулятор, с использованием квадратурной ошибки, для управления амплитудой первичных колебаний по оси возбуждения и компенсации влияния асимметричности подвеса на амплитуду вторичных колебаний по оси съема [81].

В [82] Леланд представил адаптивное управление для оси возбуждения вибрационного гироскопа. А в [58] Леланд синтезировал адаптивную систему управления (АДСУ) для вибрационного гироскопа, используя метод функций Ляпунова, которая оценивает и компенсирует угловую скорость и перекрестные коэффициенты жесткости подвеса с помощью полиномиальной аппроксимации.

Из-за погрешностей изготовления МЭМС вибрационного гироскопа не легко разделить сигнал, полученный в результате действия силы Кориолиса, от сигнала, возникающего вследствие асимметричности подвеса.

Парк в [94] представил способ решения этой задачи. Он использовал для синтеза системы управления адаптивный подход с явной эталонной моделью.

Клоски в своей работе [56] использовал в системе управления решетчатый фильтр. При этом все коэффициенты жесткости подвеса идентифицируемы, но провести идентификацию коэффициентов демпфирования подвеса невозможно.

Тогда Салах в [102] предлагает новую АДСУ для управления по осям возбуждения и съема одноосного МЭМС вибрационного гироскопа колебаний и съема угловой скорости вращения основания вибрационного гироскопа, позволяющую идентифицировать все неизвестные параметры из условия минимизации квадратичного критерия невязки наблюдаемых переменных.

Фенг представляет адаптивную стратегию, основанную на оценке угловое движение, для улучшения полосы пропускания МЭМС гироскопов [67].

Джанатан и др. предложили схему адаптивного компенсационного управления для одноосного МЭМС вибрационного гироскопа [74]. Предложенная им схема управления компенсирует параметрическую неопределенность, вызванную погрешностями изготовления чувствительного элемента.

Парк и Хоровиц разработали адаптивное управление с наблюдателем, реализованное с использованием цифровых процессоров [95].

Уткин рассмотрел переменную структуру системы и показал, что переменная структура управления нечувствительна к внешним воздействиям и параметрической неопределенности [111, 112]. Нарендра, Астром, Сан, Тао описали адаптивное управление с явной эталонной моделью [50, 73, 92, 110].

В последние несколько лет для синтеза АдСУ часто используются методы, основанные на организации скользящих режимов. Адаптивное управление с поверхностью скольжения и идентификацией параметров предложено и аналитически обосновано Фрадковым и Андриевским в [49, 50, 70, 73].

Адаптивные системы с поверхностью скольжения, используемые для управления вибрационным гироскопом, синтезированы в работах [71, 72, 106 – 109, 114].

Некоторые адаптивные законы оценки неопределенностей и возмущения обсуждались в [5, 47, 53, 54, 75, 84, 96, 97, 99, 101, 105, 115, 117].

Батур предложил эталонную модель, гарантирующую устойчивость системы и синтезировал АдСУ с динамической поверхностью скольжения для одноосного МЭМС вибрационного гироскопа [53].

Парк в своей работе [94] разработал адаптивный регулятор для управления двухосным МЭМС вибрационным гироскопом, который формирует управляющие воздействия по осям возбуждения и съема, и, как следствие, управляет всей работой вибрационного гироскопа. В работе [96] Парком предложена схема адаптивного управления, которое компенсирует, возника-

ющие силы трения и неточность производства, используя оценку вектора угловой скорости.

Джон в своей работе [75] на основе [94], [96] синтезировал систему адаптивного управления для трехосного датчика измерения угловой скорости.

Для развязки каналов в [97] используется энергетический подход. Входные управляющие воздействия выбираются с целью компенсации паразитных сил, а для синтеза контура адаптации перекрестных коэффициентов жесткости и демпфирования, входящих в управление, вводится эталонная модель гироскопа с развязанными каналами. Обоснование устойчивости и сходимости алгоритма приводится методом функций Ляпунова, где функция Ляпунова представляет собой сумму энергетической составляющей и невязки при оценке параметров.

В [5, 47, 60, 74] указано, что управление без обратной связи оказывается чувствительным к малым вариациям параметров системы, которые непременно возникают в технологическом цикле производства и эксплуатации МЭМС — гироскопов.

В работах [59 – 66, 116] были синтезированы алгоритмы на основе скользящего режима. Его недостатками является, то что не ясно каким образом физически реализовать по силам скользящий режим. Возникновение скользящего режима обеспечивало достижение желаемого движения чувствительного элемента вибрационного гироскопа, компенсацию неопределенности, что приводило к ошибке в оценивании параметров, в том числе и угловой скорости. В работах было показано [25, 59 – 66], что они относятся к классу АСГ и были предложены алгоритмы, где не нужно обеспечение возникновения скользящего режима. Позднее, чтобы учесть реализуемость входного привода, было предложено рассмотреть модель гироскопа в виде механической подсистемы и динамической подсистемы описывающие генераторы накачки.

Для повышения точности определения угловой скорости в условиях параметрической неопределенности могут использоваться либо конструктивные методы (например, введение второй чувствительной массы [47]), либо алгоритмические методы, основанные на использовании принципа обратной связи [25, 59 – 66, 74]. Например, в основе семейства методов уравнивающих (электростатических) сил (force-balancing control) лежит приложение управляющих электростатических сил на обе оси гироскопа.

Квазистационарную (по отношению к частотам вынужденных гармонических колебаний чувствительной массы) угловую скорость вращения основания вибрационного гироскопа, наряду с кососимметричными коэффициентами жесткости и демпфирования, можно рассматривать как неизвестный параметр, подлежащий адаптации. Входные управляющие воздействия (силы) на обе оси гироскопа выбираются исходя из достижения объектом управления — гироскопом — заданного качества. Часто управляющие силы формируются в виде релейного алгоритма или в комбинации — суммы гладкой настраиваемой и релейной составляющих [25, 59 – 66, 74]. Вопрос о физической реализуемости при этом не рассматривается. Более того, использование релейной составляющей ухудшает идентифицирующие свойства ввиду робастности алгоритмов управления на основе скользящих режимов, в том числе по отношению к параметрической неопределенности [25].

В [31] предложен и описан новый микромеханический гироскоп, который сохраняя положительные качества известных аналогов, отличается по сравнению с ними расширением функциональных возможностей за счет преобразования угловых скоростей вращения несущего основания в электрические сигналы одновременно относительно двух осей вращения.

Адаптивный нечеткий скользящий режим стратегии управления с использованием различных достигающих законов предлагается компенсировать параметрические неопределенности и внешнее возмущение MEMS гироскоп [100].

2.1.6. Постановка задачи управления в режиме идентификации угловой скорости одноосного вибрационного гироскопа с учетом динамики привода

Математическая модель механической подсистемы одноосного вибрационного гироскопа в векторной форме (2.8) имеет вид [5, 47, 74, 59, 60]

$$S_1 : \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_b\mathbf{q} + 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}.$$

Задача управления состоит в обеспечении желаемых автоколебаний по осям Bx, By и оценивании угловой скорости вращения основания Ω_z в условиях параметрической неопределенности.

Желаемые движения для подсистемы S_1 зададим с помощью ГМ (1.5), которая в задаче управления гироскопом определяет желаемое движение ЧЭ с частотами ω_x^*, ω_y^* (по осям Bx и By) и имеет вид

$$\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_m\mathbf{q}_m = 0, \quad \mathbf{q}_m(0) \neq 0, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{q}_m = (x_m \ y_m)^T$, $\mathbf{q}_m(0)$ — вектор желаемых амплитуд, $\mathbf{K}_m = \text{diag}\{\omega_x^{*2} \ \omega_y^{*2}\}$.

Введем ошибку слежения в виде $\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\boldsymbol{\varepsilon}_x^T \ \boldsymbol{\varepsilon}_y^T)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_x^T = (\varepsilon_x \ \dot{\varepsilon}_x) = (x - x_m \mid \dot{x} - \dot{x}_m)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_y^T = (\varepsilon_y \ \dot{\varepsilon}_y) = (y - y_m \mid \dot{y} - \dot{y}_m)$ и формализуем цель управления в форме целевого неравенства

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \Delta \text{ при } t \geq t_\varepsilon, \quad (2.10)$$

где $\Delta > 0$ — точность слежения.

Требуется синтезировать адаптивную систему управления, обеспечив достижение цели управления (ЦУ) (2.10) в условиях параметрической неопределенности и идентификацию параметров гироскопа

$$\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_* \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

где $\boldsymbol{\theta}_* = (d_{xx} \ d_{xy} \ d_{yy} \ \Omega_z \ \omega_x^2 \ \omega_{xy} \ \omega_y^2)^T$, $\boldsymbol{\theta}$ — вектор параметров подсистемы S_1 и их оценки.

Обеспечим высокочастотное колебательное вращение по отношению к диапазону измеряемой угловой скорости Ω_z вращения основания гироскопа. В этом случае квазистационарную угловую скорость Ω_z можно рассматривать в модели механической подсистемы S_1 в качестве неизвестного параметра, подлежащего идентификации.

В большинстве работ для достижения цели управления используется классический скользящий режим. Например, J. Fei, C. Batur в работе [60], на основе квадратичной функции Ляпунова $V = Q + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)$ синтезирован адаптивный алгоритм управления вида $\mathbf{u} = \mathbf{Y}\boldsymbol{\theta} + \tilde{\mathbf{Q}} - \gamma \text{sign}(\mathbf{s})$, $\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{\Gamma}\mathbf{Y}^T \mathbf{s}$. Здесь $Q = 0,5 \cdot \mathbf{s}^T \mathbf{s}$, $\mathbf{s} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}\{\lambda_1 \ \lambda_2\}$, $\lambda_i > 0$; $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T > 0$;

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 & -2\dot{y} & x & y & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} & 2\dot{x} & 0 & x & y \end{pmatrix} \text{ — матрица сенсоров, } \tilde{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\lambda}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_m) + \mathbf{K}_m \mathbf{q}_m.$$

Очевидно, что при достижении многообразия $\mathbf{s} \equiv 0$ имеем $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(0)\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\lambda}t}$ и, следовательно, ЦУ (2.10) достигается. Однако, как показали исследования [116], наблюдаются ошибки оценивания параметров (включая угловую скорость), которые возрастают с ростом коэффициента усиления γ релейной составляющей управления. Это объясняется частичным парированием параметрической неопределённости объекта за счёт робастности скользящего режима не только по отношению к аддитивным, но и мультипликативным (параметрическим) возмущениям. В той же работе было показано, что приведённый выше алгоритм управления можно синтезировать методом скоростного градиента [46, 20] и, этим же методом, используя квадратичную целевую функцию Q по рассогласованию векторов состояния S_1 и эталонной модели (2.9) синтезировано гладкое адаптивное управление, обеспечивающее асимптотическое оценивание параметров.

Для учёта динамики генератора формирования управляющих сил (или для повышения астатизма), получения гладких алгоритмов управления для

механической подсистемы введём подсистему интеграторов. При этом получаем каскадную систему вида

$$\begin{aligned} S_1 : \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_b\mathbf{q} + 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{u}, \\ S_2 : \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\mathbf{v} = (v_x \ v_y)^T$ – новый управляемый вход ($\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$), $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x \ \eta_y)^T$ – вектор возмущения, который предполагается ограниченным ($\|\boldsymbol{\eta}\| \leq C_\eta$).

Заметим, что подсистема S_2 может рассматриваться как простейшая модель привода вибрационного гироскопа или как искусственно введенный интегратор в закон управления с целью повышения астатизма.

Для расширенной системы (2.11) поставим задачу обеспечения ограниченности траекторий замкнутой системы, достижения основного целевого неравенства (2.10) и дополнительной цели — идентификации параметров.

2.2. Синтез алгоритмов адаптивного управления с явной эталонной моделью механической подсистемы одноосного вибрационного гироскопа

В данном разделе рассматривается синтез алгоритмов адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом с явной эталонной моделью сходимости траекторий механической подсистемы к траектории генерирующей модели. В основе синтеза лежит разработанный в главе 1 метод с генерирующей моделью желаемого движения выходной подсистемы и методологии скоростного биградиента.

2.2.1. Постановка задачи

Математическая модель механической подсистемы одноосного вибрационного гироскопа в векторной форме S_1 с моделью приводов 1-го порядка (интеграторами) имеет вид (2.11). Генерирующая модель желаемого движения ЧЭ задана в виде (2.9) и формализуем цель управления в форме целевого неравенства (2.10). Требуется синтезировать адаптивную систему управления, обеспечив достижение ЦУ (2.10) и идентификацию параметров гироскопа $\theta \rightarrow \theta_*$ при $t \rightarrow \infty$, в условиях параметрической неопределенности.

В соответствии с уравнениями (2.11), (2.9) модель ошибки имеет вид

$$\dot{\epsilon}_i = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_i \\ -\theta_*^T \mu_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_i, \quad i \in \{x, y\}, \quad (2.12)$$

где $\mu_x = (\dot{x} \mid \dot{y} \mid 0 \mid -2\dot{y} \mid x \mid y \mid 0)^T$, $\mu_y = (0 \mid \dot{x} \mid \dot{y} \mid 2\dot{x} \mid 0 \mid x \mid y)^T$, $z_x \triangleq x_m$, $z_y \triangleq y_m$.

Введём явную эталонную модель стремления ошибки к нулю в виде

$$\dot{\epsilon}_{*i} = \mathbf{A}_{*i} \epsilon_{*i}, \quad (2.13)$$

где $\mathbf{A}_{*i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_{0i} & -\lambda_{1i} \end{pmatrix}$ — гурвицевы матрицы ($\lambda_{jx} > 0$, $\lambda_{jy} > 0$, $j = 0, 1$).

Введём невязку $\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_{*i}$. Потребуем достижения дополнительной ЦУ с динамикой, заданной явной эталонной моделью (2.13) в виде условия

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq \Delta_{\mathbf{e}_i}, \quad \Delta_{\mathbf{e}_i} > 0 \text{ при } t \geq t_*. \quad (2.14)$$

В соответствие с ЦУ (2.14) введем целевое неравенство вида

$$Q(\mathbf{e}) \leq \Delta_{\mathbf{e}}, \text{ при } t \geq t_*. \quad (2.15)$$

Выберем целевой функционал для конечного каскада S_1 в виде

$$Q(\mathbf{e}) = 0,5 \cdot (\mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \mathbf{e}_y), \quad (2.16)$$

где $\mathbf{e}^T = (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_y^T)$, $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T > 0$, $i \in \{x, y\}$, $\Delta_{\mathbf{e}} > 0$ — точность, согласованная с $\Delta_{\mathbf{e}_i}$ и матрицами $\mathbf{H}_i$.

Очевидно, что при $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ ЦУ (2.14) достигается при любых ограниченных начальных условиях $\boldsymbol{\varepsilon}_i(0)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{*i}(0)$. Учитывая гурвицевость эталонной модели (2.13) и отсутствие внешних возмущений, не умаляя общности результата, с целью упрощения синтезируемых алгоритмов управления выберем начальные условия для эталонной модели нулевыми ($\boldsymbol{\varepsilon}_{*i}(0)$).

2.2.2. Синтез алгоритмов управления

Приведём синтез алгоритмов управления одноосным вибрационным гироскопом методом скоростного градиента [22].

Первый этап синтеза. С учетом (2.12), (2.13) уравнение отклонений по ошибке слежения имеет вид

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_* \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_i - \mathbf{A}_{*i} \boldsymbol{\varepsilon}_{*i}. \quad (2.17)$$

Выберем «идеальное» виртуальное управление $\mathbf{u}_*^{virt} = (u_{x*}^{virt} \quad u_{y*}^{virt})^T$ в форме суммы компенсирующей и линейной стабилизирующей обратной связи

$$u_{i*}^{virt} = \boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i, \quad (2.18)$$

где $v_x = -\omega_x^{*2} x_m - \lambda_{0x} \varepsilon_x - \lambda_{1x} \dot{\varepsilon}_x$, $v_y = -\omega_y^{*2} y_m - \lambda_{0y} \varepsilon_y - \lambda_{1y} \dot{\varepsilon}_y$.

Заметим, что эталонная модель (2.13) входит в виртуальное управление (2.18) только своими параметрами λ_{0i} , λ_{1i} .

Структурная схема конечного каскада, замкнутого «идеальным» виртуальным управлением (при виртуальном выполнении $\mathbf{u} = \mathbf{u}_*^{virt}$) приведена на рис. 2.8.

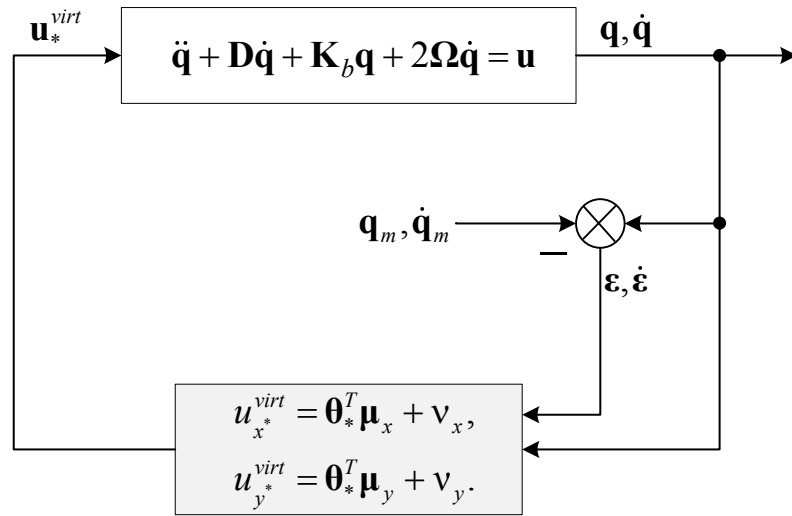


Рис. 2.8. Выходной каскад с «идеальным» виртуальным управлением

Производная по времени $w(\mathbf{e}, \theta_*)$ от целевого функционала $Q(\mathbf{e})$ при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_*^{virt}$, имеет вид

$$\begin{aligned} w(\mathbf{e}, \theta_*) &= \mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \dot{\mathbf{e}}_y = \mathbf{e}_x^T \mathbf{A}_{*x} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{A}_{*y} \mathbf{e}_y \leq \\ &\leq -\rho_1 0,5 \mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \mathbf{e}_x - \rho_2 0,5 \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \mathbf{e}_y \leq -\rho Q(\mathbf{e}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{A}_{*i}$ — гурвицевы матрицы, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова

$$\mathbf{H}_i \mathbf{A}_{*i} + \mathbf{A}_{*i}^T \mathbf{H}_i = -\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^T > 0, \quad i \in \{x, y\}, \quad (2.19)$$

$$\rho_i = \lambda_{\min}(\mathbf{G}_i) / \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i), \quad \rho = \min\{\rho_x, \rho_y\} > 0.$$

Следовательно, $Q(\mathbf{e}(t)) \leq Q(\mathbf{e}(0)) \cdot \exp(-\rho t)$, $Q(\mathbf{e}(t)) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и в силу квадратичной формы $Q(\mathbf{e})$, получаем $\mathbf{e} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Второй этап синтеза. Заменим в «идеальном» виртуальном управлении (2.18) неизвестные параметры θ_* настраиваемыми θ . Получим настраиваемое виртуальное управление вида

$$u_i^{virt} = \theta^T \mu_i + v_i. \quad (2.20)$$

Вычисляя скорость изменения по времени $w(\mathbf{e}, \theta)$ целевого функционала $Q(\mathbf{e})$, а затем градиенты по настраиваемым параметрам, получаем алгоритм адаптации в дифференциальной форме

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} w(\mathbf{e}, \theta) = -\Gamma (\delta_x \mu_x + \delta_y \mu_y), \quad (2.21)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ — матрица коэффициентов усиления (в частности $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i, i = \overline{1, 7}\}$, $\gamma_i > 0$), $\delta_x = \varepsilon_x h_{12}^x + \dot{\varepsilon}_x h_{22}^x$, $\delta_y = \varepsilon_y h_{12}^y + \dot{\varepsilon}_y h_{22}^y$; $\mathbf{H}_x = (h_{ij}^x)$, $\mathbf{H}_y = (h_{ij}^y)$ — матрицы, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова (2.19).

Заметим, что для эталонной модели выбраны нулевые начальные условия. Поэтому в правая часть алгоритма адаптации зависит только от рассогласования между траекториями механической подсистемы гироскопа и генерирующей модели $(\nabla_{\theta} w(\mathbf{e}, \theta) = \nabla_{\theta} w(\mathbf{\varepsilon}, \theta))$.

Структурная схема конечного каскада с адаптивным виртуальным управлением представлена на рис. 2.9.

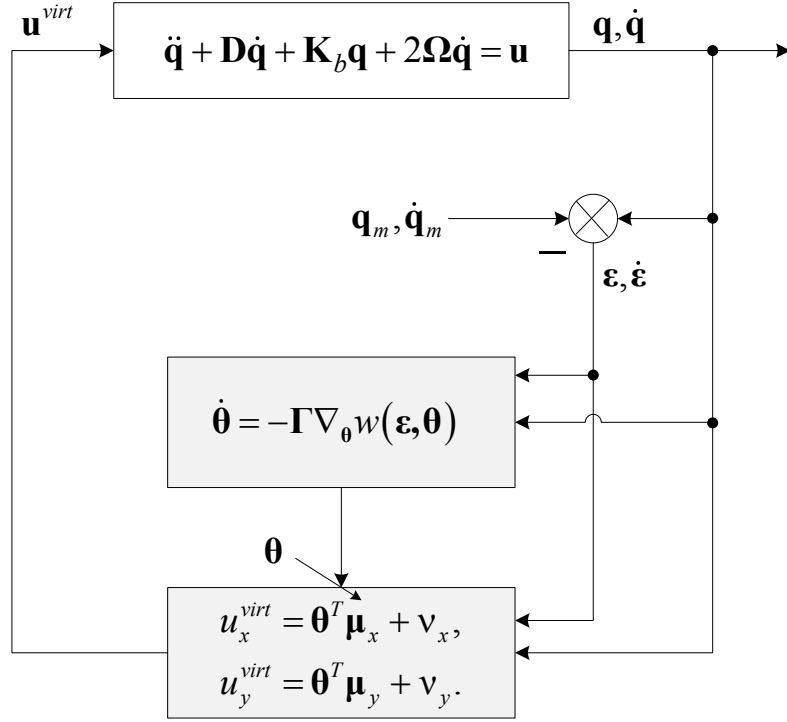


Рис. 2.9. Конечный каскад с адаптивным виртуальным управлением

Третий этап синтеза. Выберем отклонение $\sigma \equiv \mathbf{0}$ в форме невязки между входной подсистемой S_1 и адаптивным виртуальным управлением

$\mathbf{u}^{virt} = \begin{pmatrix} u_x^{virt} & u_y^{virt} \end{pmatrix}^T$ так, что

$$\sigma = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{virt}. \quad (2.22)$$

Введем дополнительную целевую функцию (ЦФ)

$$R(\sigma) = 0,5\sigma^T \sigma \leq \Delta_\sigma, \text{ при } t \geq t^*, \quad (2.23)$$

где $0 < \Delta_\sigma < \Delta_\varepsilon$, $t^* < t_*$.

Зададим алгоритм управления в виде семейства [24, 87]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \gamma_m \Psi(\sigma), \quad (2.24)$$

где $\mathbf{v}_0$ — начальное (априорно заданное) управление (может быть равно нулю), вектор—функция $\Psi(\sigma)$ выбирается из условия усиленной псевдоградиентности:

$$\Psi(\sigma)^T \nabla_v \mu(\sigma, \mathbf{v}) \geq \beta \|\nabla_v \mu(\sigma, \mathbf{v})\|^\delta,$$

где $\beta > 0, \delta = 1, 2, \dots$ — некоторые числа, $\mu(\sigma, v) = \sigma^T (\dot{u} - \dot{u}^{virt}) = \sigma^T (v + \eta - \tau)$ — производная по времени от целевого функционала (2.23), $\nabla_v \mu(\sigma, v) = \sigma$ — градиент по управлению v . Здесь $\tau^T = (\dot{\theta}^T \mu_x + \theta^T \dot{\mu}_x + \dot{v}_x \quad \dot{\theta}^T \mu_y + \theta^T \dot{\mu}_y + \dot{v}_y)$.

Условию усиленной псевдоградиентности удовлетворяют, например, функции вида

$$\psi(\sigma) = \tilde{\Gamma}_2 \text{sign}(\nabla_v \mu(\sigma, v)), \text{ при } \delta = 1, \beta = \frac{\lambda_{\min}(\tilde{\Gamma}_2)}{\sqrt{2}},$$

$$\psi(\sigma) = \tilde{\Gamma}_1 \nabla_v \mu(\sigma, v), \text{ при } \delta = 2, \beta = \lambda_{\min}(\tilde{\Gamma}_1),$$

где $\tilde{\Gamma}_i = \tilde{\Gamma}_i^T > 0$ — (2×2) матрицы усилителя; $\lambda_{\min}(\tilde{\Gamma}_i)$ является минимальным собственным значением $\tilde{\Gamma}_i$.

При $v_0 = 0$, получаем релейные и гладкие алгоритмы вида

$$v = -\gamma_m \text{sign}(\nabla_v \mu(\sigma, v)) = -\gamma_m \text{sign}(\sigma), \quad (2.25)$$

$$v = -\gamma_m \nabla_v \mu(\sigma, v) = -\gamma_m \cdot \sigma. \quad (2.26)$$

Заметим, что релейные и гладкие алгоритмы управления (2.24) с алгоритмом адаптации относятся к классу алгоритмов скоростного биградиента [22] (алгоритмы формируются в направлениях антиградиентных скоростям изменения по времени целевых функций $Q(\varepsilon)$ и $R(\sigma)$).

Возвращаясь к управляемым силам, воздействующим на механическую подсистему S_1 (при $\delta = 1$ и 2), имеем

$$u(t) = -\gamma_m \int_0^t \text{sign}(\sigma(\tau)) d\tau,$$

$$u(t) = -\gamma_m \int_0^t \sigma(\tau) d\tau.$$

Структурная схема системы управления вибрационным гироскопом представлена на рис. 2.10.

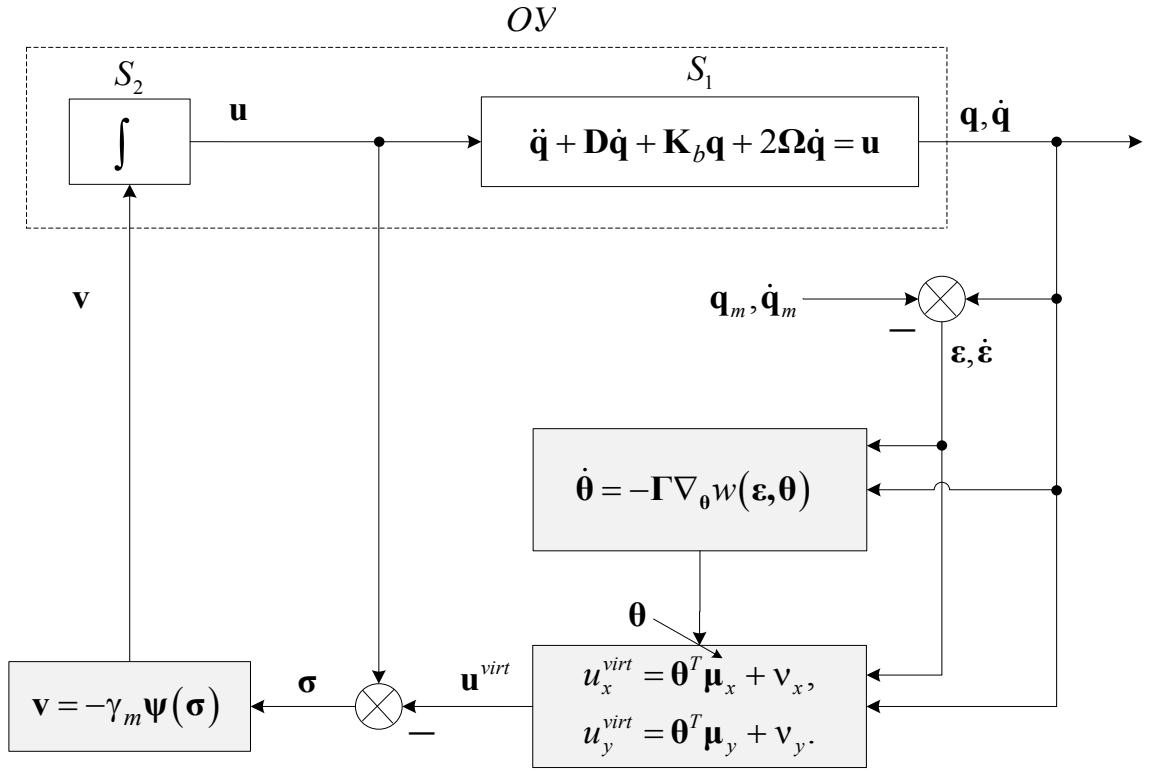


Рис. 2.10. Замкнутая адаптивная система управления

Теорема 2.1. Для системы (2.11), (2.9), (2.13), (2.20), (2.21), (2.22), (2.24) справедливы утверждения:

1. При $\delta=1$ существует $\tilde{\gamma}_m > 0$ такое, что при $\gamma_m > \tilde{\gamma}_m$ цели управления (2.15), (2.23) достигаются при любых $\Delta_\epsilon > 0$, $\Delta_e > 0$, $\Delta_\sigma > 0$, все траектории замкнутой системы ограничены, $Q(e) + R(\sigma) \rightarrow 0$ ($e \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$. Существует момент времени t^* , такой, что $R(\sigma) \equiv 0 \Leftrightarrow \sigma \equiv 0$ при $t \geq t^*$. Алгоритм адаптации (2.21) обладает идентифицирующими свойствами: $\theta \rightarrow \theta_*$ при $t \rightarrow \infty$.

2. При $\delta > 1$ для любого $\Delta = \min\{\Delta_\epsilon, \Delta_\sigma\} > 0$ существуют $\bar{\gamma}_m(\Delta) > 0$ такое, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_m$ цели управления (2.15), (2.23) достигаются при любых $\Delta_\epsilon > 0$, $\Delta_e > 0$, $\Delta_\sigma > 0$, все траектории замкнутой системы ограничены. При $\gamma_m \rightarrow \infty$ справедливо: $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(e) \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \theta_*$ при $t \rightarrow \infty$, алгоритм адаптации (2.21) обладает идентифицирующими свойствами: $\theta \rightarrow \theta_*$ при $t \rightarrow \infty$.

3. Для замкнутой системы существует функция Ляпунова вида

$$V(\mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = Q(\mathbf{e}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5 \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2, \quad (2.27)$$

где $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$, $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, 7}$.

Теорему 2.1 можно рассматривать как следствие теоремы 1.1. Условия теоремы носят достаточный характер и могут быть ослаблены в ходе дальнейших исследований. Поэтому доказательство теоремы 2.1 методом функции Ляпунова приведено в приложении А.

2.2.3. Идентифицирующие свойства алгоритмов адаптивного управления

Из анализа правой части алгоритма адаптации, достижения $(\mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для случая $\delta = 1$ и предельного достижения (при $\gamma_m \rightarrow \infty$) для случая $\delta > 1$ следует, что $\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\| \rightarrow \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$. Из анализа траекторий системы при $\boldsymbol{\sigma} = 0, \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ стандартным образом следует, что алгоритм адаптации обладает идентифицирующими свойствами если выполнено условие интегральной невырожденности [20, 46] матрицы $\Phi(t)$:

$$\int_{\tau}^{\tau+L} \Phi(t) \Phi(t)^T ds \geq \alpha \mathbf{I},$$

где τ, L, α — некоторые положительные числа,

$$\Phi(t) \Phi(t)^T = \begin{bmatrix} \dot{x}^2 & \dot{x}\dot{y} & 0 & -2\dot{x}\dot{y} & x\dot{x} & \dot{x}y & 0 \\ \dot{x}\dot{y} & \dot{x}^2 + \dot{y}^2 & \dot{x}\dot{y} & 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 & x\dot{y} & x\dot{x} + y\dot{y} & \dot{x}y \\ 0 & \dot{x}\dot{y} & \dot{y}^2 & 2\dot{x}\dot{y} & 0 & x\dot{y} & y\dot{y} \\ -2\dot{x}\dot{y} & 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 & 2x\dot{y} & 4\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 & -2x\dot{y} & 2x\dot{x} - 2y\dot{y} & 2\dot{x}y \\ x\dot{x} & x\dot{y} & 0 & -2x\dot{y} & x^2 & xy & 0 \\ \dot{x}y & x\dot{x} + y\dot{y} & x\dot{y} & 2x\dot{x} - 2y\dot{y} & xy & x^2 + y^2 & xy \\ 0 & \dot{x}y & y\dot{y} & 2\dot{x}y & 0 & xy & y^2 \end{bmatrix}.$$

В установившемся режиме движение чувствительного элемента гироскопа имеет колебательный характер, поэтому $\Phi(t)\Phi(t)^T$ полного ранга и условие идентифицируемости выполнено.

2.2.4. Пример синтеза и результаты математического моделирования

В работах [5, 47, 59, 60, 74] отмечалось, что основное влияние на точность измерения скорости вращения оказывают перекрёстные связи вибрационного гироскопа. Поэтому будем считать неизвестными параметрами $\theta_2^* = d_{xy}$, $\theta_4^* = \Omega_z$, $\theta_6^* = \omega_{xy}$.

$$\text{Выбирая } \mathbf{A}_{*i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, i = \{x, y\}, \text{ получаем } \mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При данных предположениях релейные, гладкие и комбинированные алгоритмы управления имеют вид

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.28)$$

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{v} = -\gamma_{m1} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \gamma_{m2} \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.30)$$

$$\text{где } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{virt}, \quad \mathbf{u}^{virt} = \begin{pmatrix} d_{xx}\dot{x} + (\theta_2 - 2\theta_4)\dot{y} + \omega_x^2 x + \theta_6 y - \omega_1^2 x_m - 2\dot{e}_x - e_x \\ d_{yy}\dot{y} + (\theta_2 + 2\theta_4)\dot{x} + \theta_6 x + \omega_y^2 y - \omega_2^2 y_m - 2\dot{e}_y - e_y \end{pmatrix},$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma_2(\delta_x \dot{y} + \delta_y \dot{x}), \quad \dot{\theta}_4 = -\gamma_4(\delta_y \dot{x} - \delta_x \dot{y}), \quad \dot{\theta}_6 = -\gamma_6(\delta_x y + \delta_y x),$$

$$\delta_i = \varepsilon_i + \dot{\varepsilon}_i, i = x, y.$$

Моделирование проводилось при $x_m = 0.3 \cos \omega_x^* t$, $y_m = 0.5 \sin \omega_y^* t$, $\boldsymbol{\eta}^T = (0.8 \sin(40\pi t) \quad 0.8 \cos(40\pi t))$ и параметрах моделирования, приведённых в таблицах 2.1—2.2. Отметить, что параметры виброгироскопа приведены в безразмерных единицах [97].

Таблица 2.1

Параметры объекта управления и генерирующей модели

ω_x^*, ω_y^*	d_{xx}	d_{xy}	d_{yy}	ω_x	ω_{xy}	ω_y	Ω_z
$1\kappa\Gamma\varphi$	0.05	0.005	0.06	1.05	0.01	0.97	$5\text{ }c^{-1}$

Таблица 2.2

Параметры регулятора

γ_2	5.5
γ_4	10
γ_6	4

Результаты математического моделирования системы управления с релейным алгоритмом управления (2.28) при $\gamma_m = 8$ приведены на рис. 2.11 — рис. 2.18.

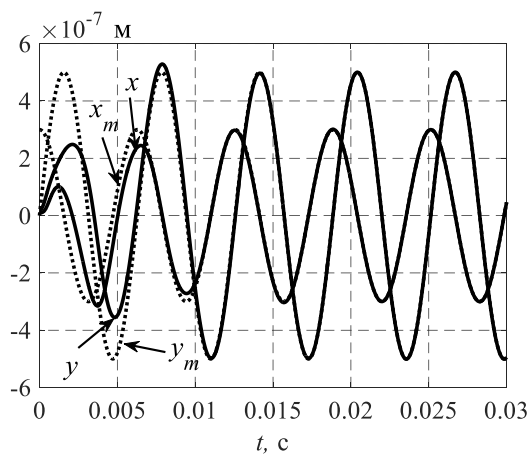


Рис. 2.11. Траектории объекта и генерирующей модели

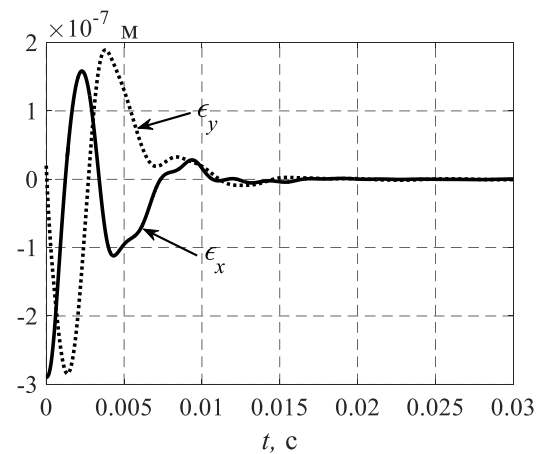


Рис. 2.12. Ошибки слежения

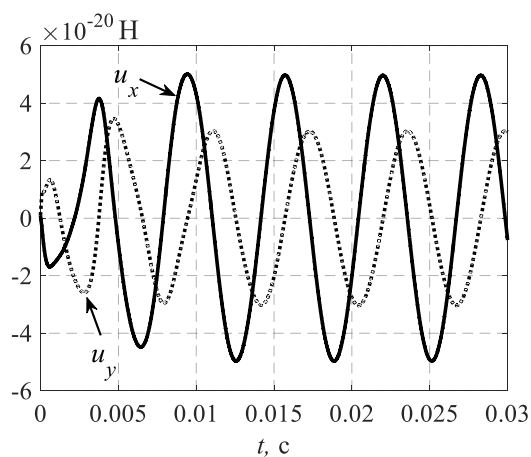


Рис. 2.13. Входы гироскопа

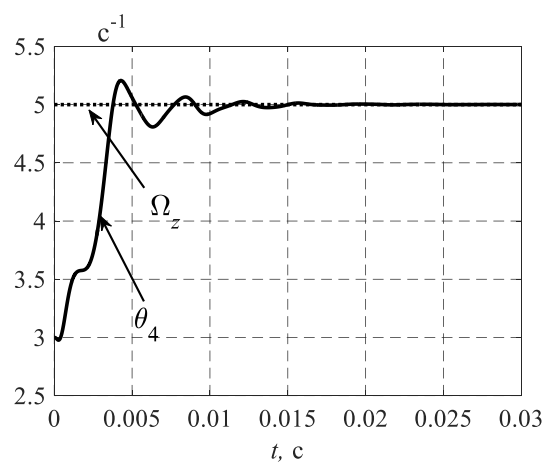


Рис. 2.16. Результаты идентификации параметра Ω_z

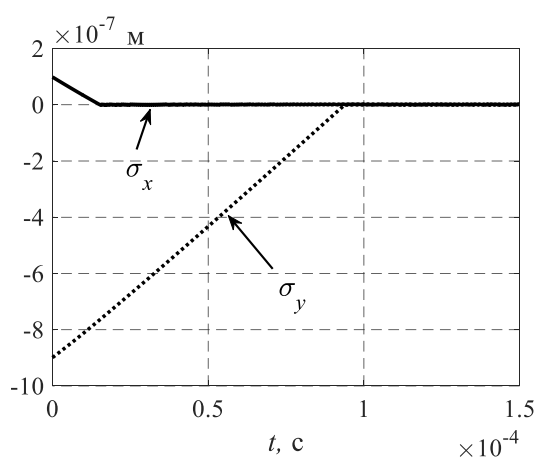


Рис. 2.14. Отклонения от многообразия скольжения

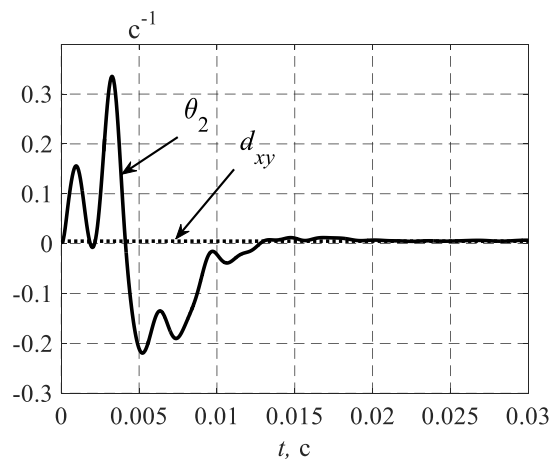


Рис. 2.17. Результаты идентификации параметра d_{xy}

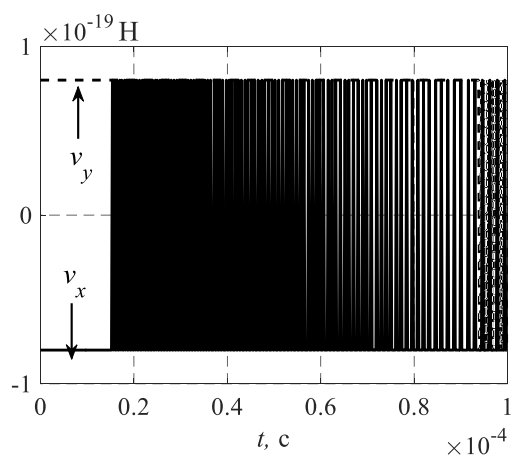


Рис. 2.15. Управления.

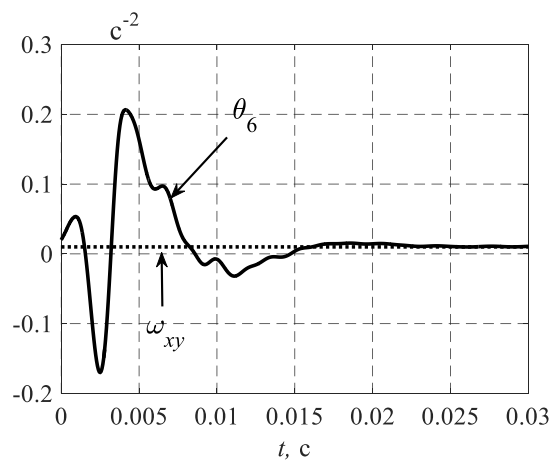


Рис. 2.18. Результаты идентификации параметра ω_{xy} .

Релейный алгоритм адаптивного управления (настраиваемый скользящий режим) обеспечивает возникновение настраиваемого скользящего режима, робастность по отношению к внешним воздействиям на входах интеграторов, стремление траекторий системы к настраиваемому многообразию скольжения и желаемым колебаниям чувствительного элемента гироскопа, характеризуется идентифицирующими свойствами.

Результаты математического моделирования системы управления с гладким алгоритмом управления (2.29) при $\gamma_m = 5e2$ приведены на рис. 2.19 — рис. 2.26.

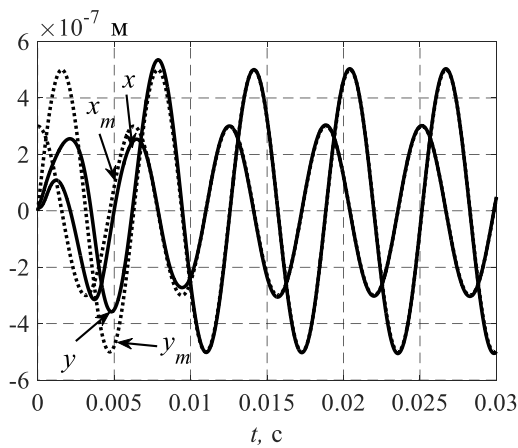


Рис. 2.19. Траектории объекта и генерирующей модели

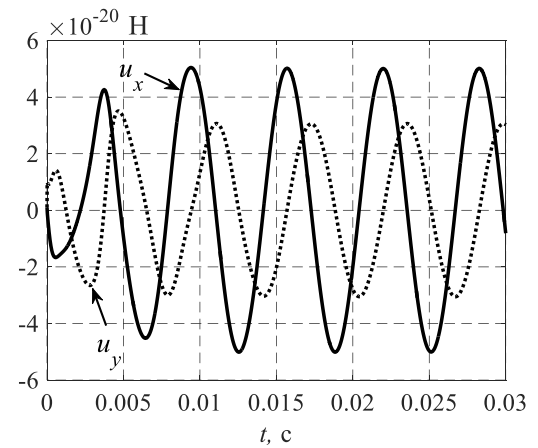


Рис. 2.21. Входы гироскопа

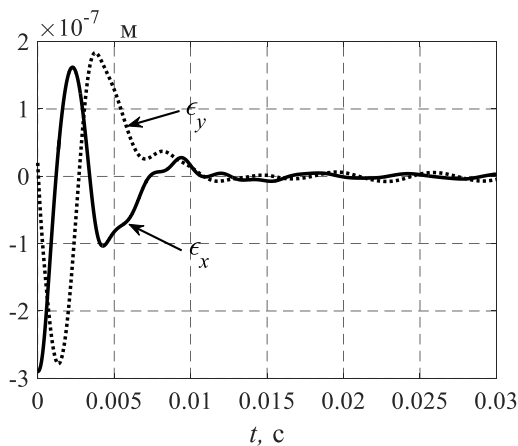


Рис. 2.20. Ошибки слежения

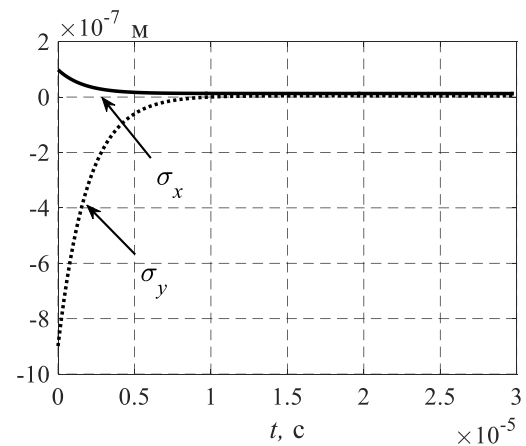


Рис. 2.22. Отклонения от многообразия скольжения

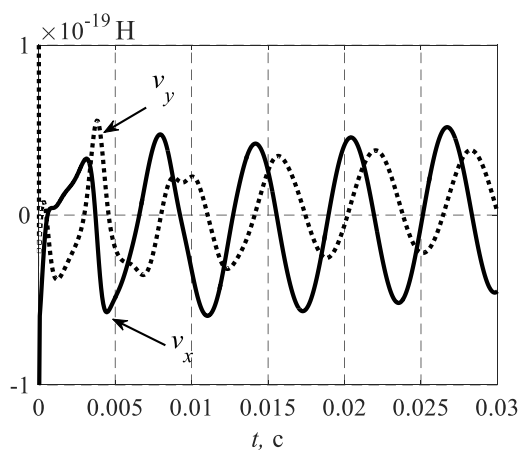


Рис. 2.23. Управления

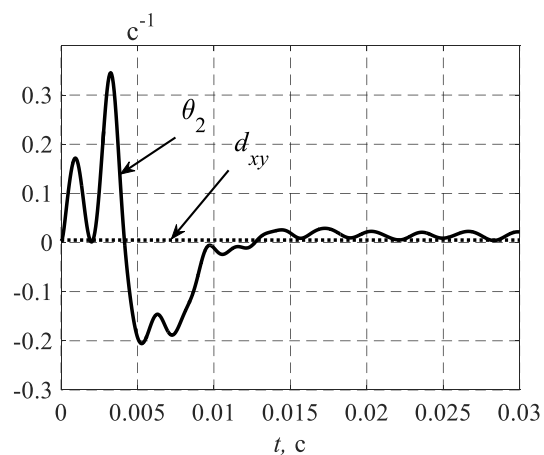


Рис. 2.25. Результаты
идентификации параметра d_{xy}

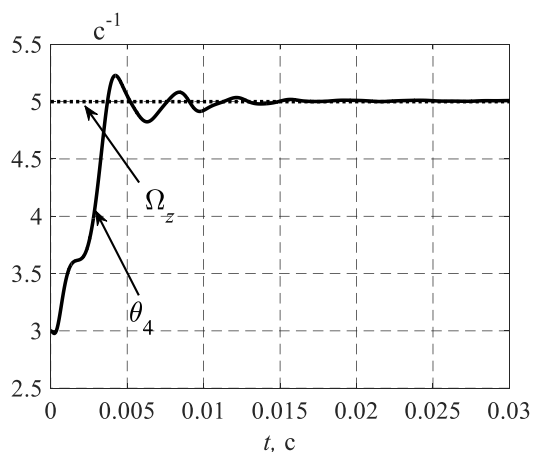


Рис. 2.24. Результаты
идентификации параметра Ω_z

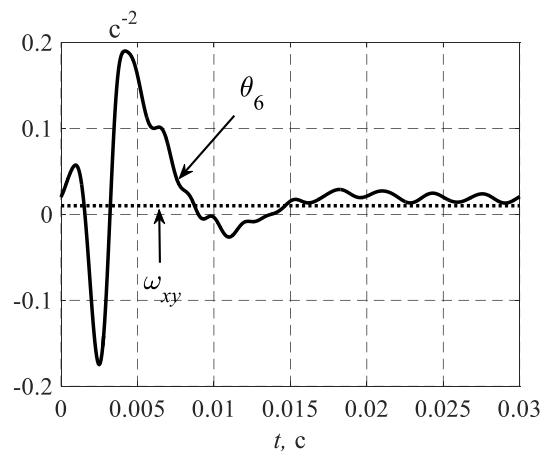


Рис. 2.26. Результаты
идентификации параметра ω_{xy}

Результаты математического моделирования системы управления с гладким алгоритмом управления (2.29) при $\gamma_m = 1e4$ приведены на рис. 2.27—рис. 2.34.

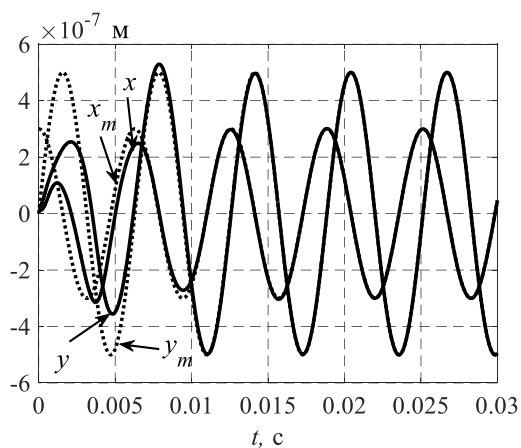


Рис. 2.27. Траектории объекта и генерирующей модели

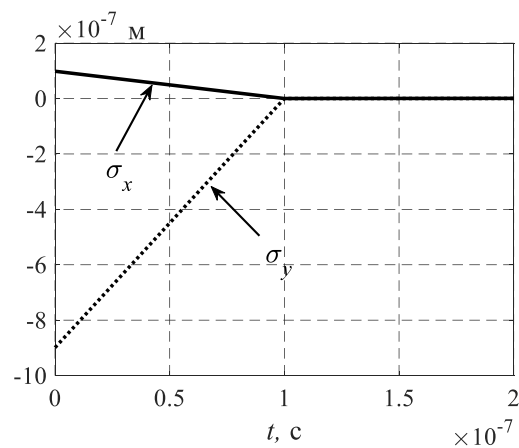


Рис. 2.30. Отклонения от многообразия скольжения

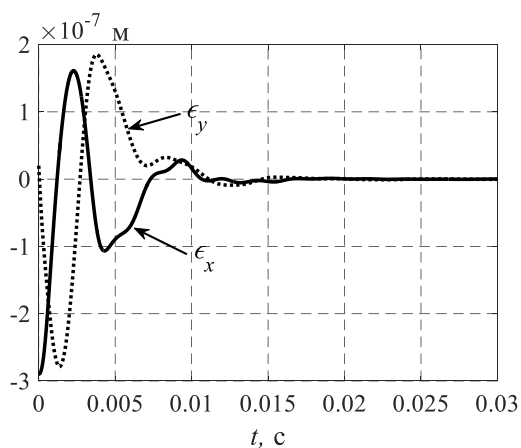


Рис. 2.28. Ошибки слежения

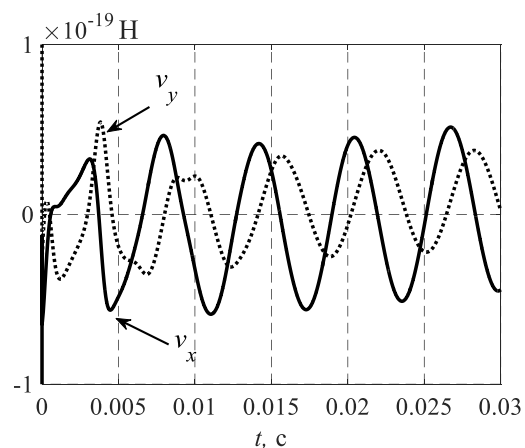


Рис. 2.31. Управления

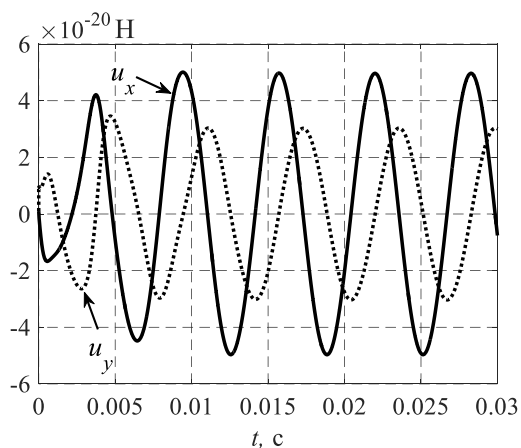


Рис. 2.29. Входы гироскопа

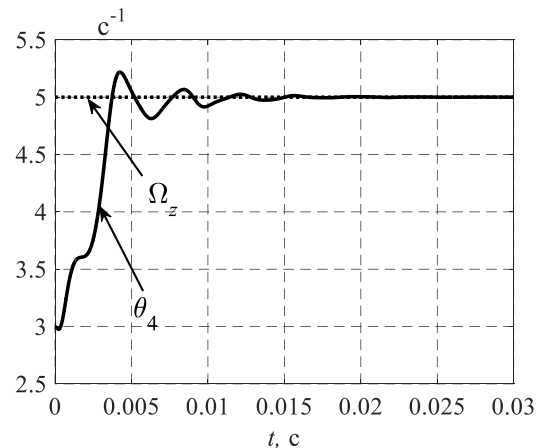


Рис. 2.32. Результаты идентификации параметра Ω_z

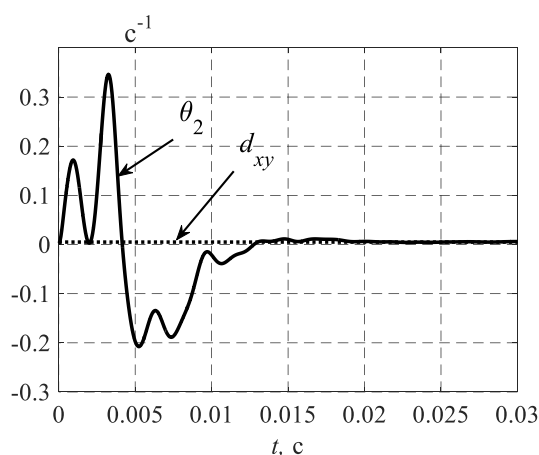


Рис. 2.33. Результаты
идентификации параметра d_{xy}

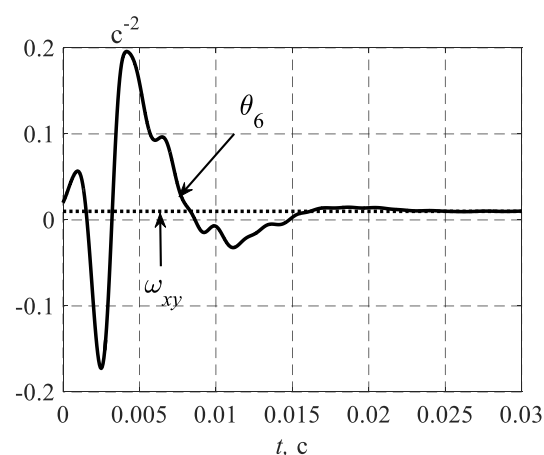


Рис. 2.34. Результаты
идентификации параметра ω_{xy}

Очевидно, что приведенные результаты (рис. 2.27— рис. 2.34) обладают хорошими свойствами сходимости и идентификации при большом коэффициенте усиления на управление γ_m .

Гладкий алгоритм обеспечивает предельное асимптотическое стремление траекторий замкнутой системы к настраиваемому многообразию скольжения с заданной конечной точностью и, как следствие, конечную точность воспроизведения желаемых колебаний чувствительного элемента, конечную точность оценивания параметров, включая угловую скорость основания гироскопа. Точность повышается при увеличении коэффициента усиления алгоритма управления.

Из теоремы 2.1 следует, что управление гладкого алгоритма обладает более слабыми робастными свойствами сходимости и идентификации, поэтому его целесообразно использовать в комбинации с релейным алгоритмом. При этом в замкнутой системе достигается асимптотическая устойчивость $(\sigma, \varepsilon, \theta - \theta_*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Результаты моделирования системы управления с комбинированным алгоритмом управления (2.30) при $\gamma_{m1} = 60$, $\gamma_{m2} = 5$ приведены на рис. 2.35 — рис. 2.42.

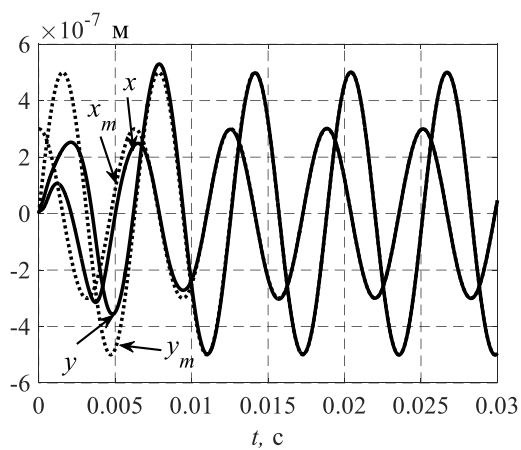


Рис. 2.35. Траектории объекта и генерирующей модели

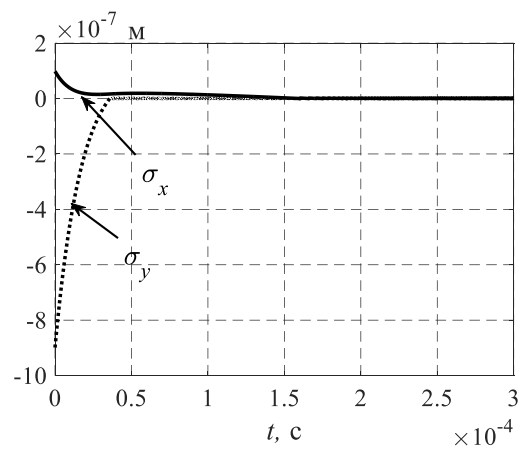


Рис. 2.38. Отклонения от многообразия скольжения

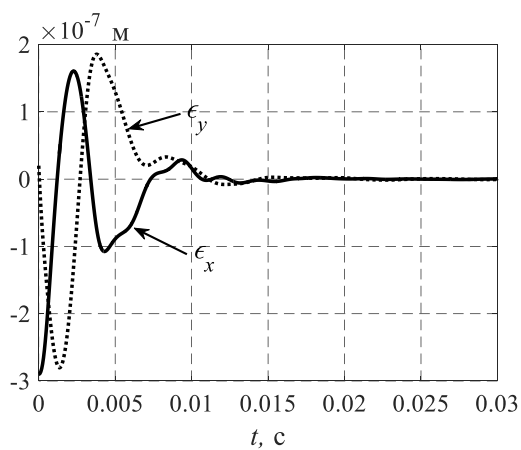


Рис. 2.36. Ошибки слежения

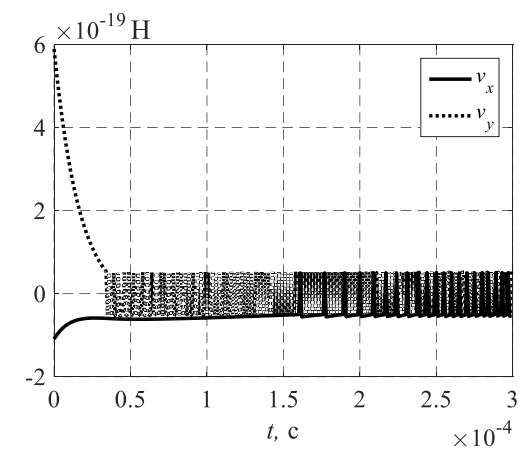


Рис. 2.39. Управления

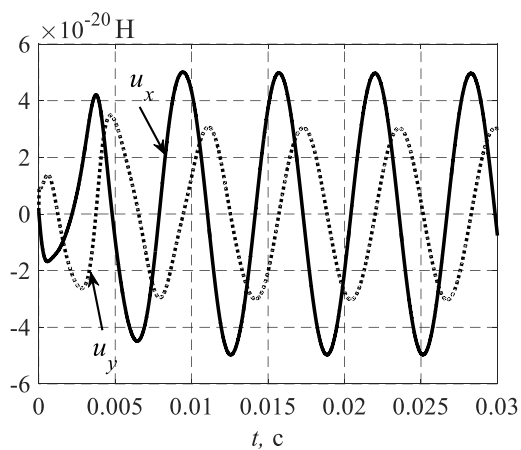


Рис. 2.37. Входы гироскопа

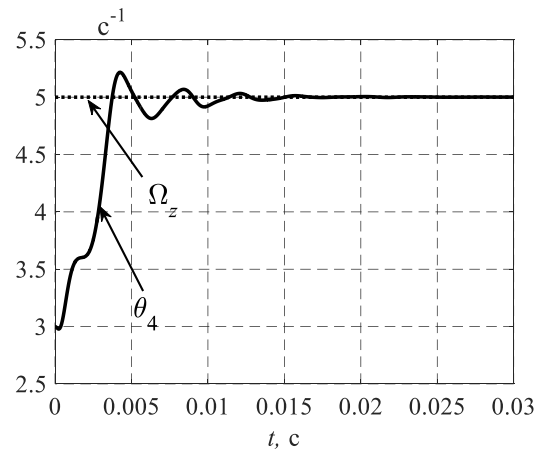


Рис. 2.40. Результаты идентификации параметра Ω_z

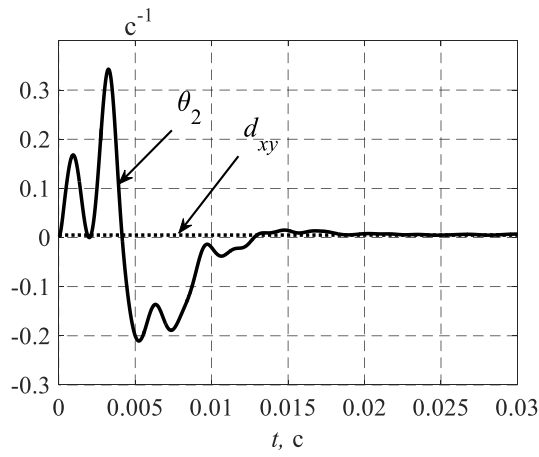


Рис. 2.41. Результаты
идентификации параметра d_{xy}

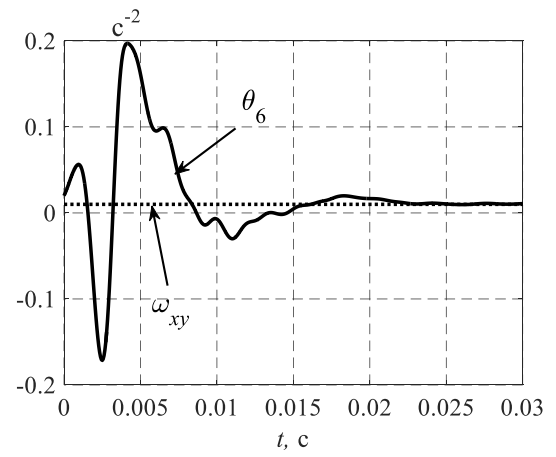


Рис. 2.42. Результаты
идентификации параметра ω_{xy}

В комбинированном алгоритме это достигается за счёт релейной составляющей с меньшим, по сравнению с релейным алгоритмом, коэффициентом усиления.

Как видно из рис. 2.11 — рис. 2.42, релейный, гладкий (при бесконечно больших коэффициентах усиления по управлению) и комбинированный алгоритмы управления обеспечивают достижение асимптотической устойчивости $(\sigma, \varepsilon, \theta - \theta_*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

2.3. Синтез алгоритмов адаптивного управления с модифицированной эталонной моделью механической подсистемы одноосного вибрационного гироскопа

В данном разделе рассмотрен подход к синтезу алгоритмов управления, основанный на использовании модифицированной эталонной модели сходимости ошибки слежения за траекторией эталонной модели. Модифицированная модель строится в виде линейной, гурвицевой системы с входным воздействием пропорциональным невязке между выходом входного каскада и виртуальным управлением. Целью модификации является улучшения идентифицирующих свойств и снижение энергетических затрат на управления за счёт улучшения структурного соответствия модели ошибки и модифицированной эталонной модели не только на многообразии пересечений гиперповерхностей (невязка тождественно равна нулю), но и при движении вне этого многообразия. Заметим, что введения невязки в неустойчивую эталонную модель колебаний чувствительного тела или в виртуальный закон управления не позволяет достичь заданной цели.

Отметим так же, что отличие от многих работ [26, 27, 86] нами рассматриваемся более общая модель механической подсистемы, в которой масса чувствительного элемента считается неопределенной. При этом, модифицированная модель эталонной модели может иметь элемент самонастройки.

2.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель одноосного гироскопа с интегратором (2.11)

$$\begin{aligned} S_1 : \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_b\mathbf{q} + 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ S_2 : \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $\mathbf{B} = m^{-1}\mathbf{I}$, m — неизвестная масса.

Зададим желаемые автоколебания для подсистемы S_1 (2.9)

$$\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_m\mathbf{q}_m = 0, \quad \mathbf{q}_m(0) \neq 0,$$

где $\mathbf{q}_m = (x_m \ y_m)^T$, $\mathbf{q}_m(0)$ — вектор желаемых амплитуд,
 $\mathbf{K}_m = \text{diag}\{\omega_x^{*2} \ \omega_y^{*2}\}$.

Выходной каскад S_1 представляет собой двухканальную систему с перекрёстными связями, поэтому сформулируем цель управления (ЦУ) для каждого каскада в виде требований ограниченности траекторий замкнутой системы и достижения целевых неравенств вида (2.10)

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}_i\| \leq \Delta_{\varepsilon_i}, \quad i \in \{x, y\} \text{ при } t \geq t_*, \quad (2.32)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_x^T = (\varepsilon_x \ \dot{\varepsilon}_x) = (x - x_m \ \dot{x} - \dot{x}_m)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_y^T = (\varepsilon_y \ \dot{\varepsilon}_y) = (y - y_m \ \dot{y} - \dot{y}_m)$, $\Delta_{\varepsilon_i} > 0$ — требуемая точность, t_* — время достижения ЦУ.

Требуется синтезировать адаптивную систему управления, обеспечив ограниченность траекторий системы, достижение цели управления (2.32) в условиях параметрической неопределенности и идентификацию параметров гироскопа

$$\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_* \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

$$\hat{m} \rightarrow m \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — оценки вектора параметров подсистемы S_1 , $\hat{m}$ — оценка массы.

2.3.2. Синтез алгоритмов управления

Первый этап синтеза. Решим задачу управления конечного каскада. Введём невязку между каналами входа выходного каскада и виртуальным управлением в форме

$$\sigma_i = u_i - u_i^{\text{virt}}, \quad i \in \{x, y\}, \quad (2.33)$$

где u_i^{virt} — синтезируемые в ходе 1-го и 2-го этапов виртуальные управления каналами конечного каскада.

В соответствии с моделью подсистемы S_1 и эталонной моделью (2.9) запишем модели ошибок по каналам в виде

$$\dot{\mathbf{\varepsilon}}_i = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_i \\ -\mathbf{\theta}_*^T \mathbf{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} u_i, \quad i \in \{x, y\}, \quad (2.34)$$

где $\mathbf{\mu}_x = (\dot{x} \mid \dot{y} \mid 0 \mid -2\dot{y} \mid x \mid y \mid 0)^T$, $\mathbf{\mu}_y = (0 \mid \dot{x} \mid \dot{y} \mid 2\dot{x} \mid 0 \mid x \mid y)^T$, $z_x \triangleq x_m$, $z_y \triangleq y_m$.

Введем желаемую динамику стабилизации положений $\mathbf{\varepsilon}_i = 0$ в виде дополнительной *модифицированной эталонной модели* конечного каскада

$$\dot{\mathbf{\varepsilon}}_{*i} = \mathbf{A}_{*i} \mathbf{\varepsilon}_{*i} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i, \quad i \in \{x, y\}, \quad (2.35)$$

где $\mathbf{A}_{*i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_{0i} & -\lambda_{1i} \end{pmatrix}$ — гурвицевы матрицы ($\lambda_{jx} > 0$, $\lambda_{jy} > 0$, $j = 0, 1$), $\hat{m}$

— оценка m — массы чувствительного элемента.

Введём векторы отклонений по ошибкам слежения $\mathbf{e}_i = \mathbf{\varepsilon}_i - \mathbf{\varepsilon}_{*i}$. Потребуем достижения ЦУ (2.32) с динамикой, заданной модифицированной эталонной моделью (2.35), таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq \Delta_{\mathbf{e}_i}, \quad i \in \{x, y\}, \quad \Delta_{\mathbf{e}_i} > 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_*. \quad (2.36)$$

Замечание 2.1. При ограниченности σ_i , $\hat{m}^{-1}$ ($|\sigma_i| \leq C_1$, $\hat{m}^{-1} \leq C_2$), в силу BIBO устойчивости (по входу–выходу) модифицированной модели (2.35), следует, что $\|\mathbf{\varepsilon}_{*i}\| \leq \Delta_{\mathbf{\varepsilon}_{*i}}$ при $t \geq t_*$ и некотором $\Delta_{*i}(C_1, C_2) > 0$. Из неравенства треугольника имеем $\|\mathbf{\varepsilon}_i\| \leq \|\mathbf{e}_i\| + \|\mathbf{\varepsilon}_{*i}\|$ и, следовательно, $\|\mathbf{\varepsilon}_i\| \leq \|\mathbf{e}_i\| + \|\mathbf{\varepsilon}_{*i}\| \leq \Delta_{\mathbf{e}_i} + \Delta_{\mathbf{\varepsilon}_{*i}}$ при $t \geq t_*$. Условие (2.32) выполняется, если $\Delta_{\mathbf{e}_i} + \Delta_{\mathbf{\varepsilon}_{*i}} \leq \Delta_{\mathbf{\varepsilon}_i}$, $i \in \{x, y\}$. Очевидно, что при ограниченности $\hat{m}^{-1}$ и движении замкнутой системы на пересечении многообразий $\sigma_i \equiv 0$ при $t \geq t_*$, и (или) выполнении условия $\mathbf{e}_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ так же можно добиться выполнения условия (2.32) соответствующим выбором быстродействия модифицированной эталонной модели (2.35).

В соответствии с условием (2.36) сформируем целевое неравенство вида

$$Q(\mathbf{e}) \leq \Delta_{\mathbf{e}} \text{ при } t \geq t_*, \quad (2.37)$$

где $Q(\mathbf{e}) = 0,5 \cdot (\mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \mathbf{e}_y)$ — целевой функционал, $\mathbf{e}^T = (\mathbf{e}_x^T \quad \mathbf{e}_y^T)$, $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T > 0$, $i \in \{x, y\}$, $\Delta_{\mathbf{e}} > 0$ — точность, согласованная с $\Delta_{\mathbf{e}_i}$ и матрицами $\mathbf{H}_i$.

С учетом (2.33), (2.34), (2.35) уравнение отклонений по ошибке слежения имеет вид

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} u_i^{virt} - \mathbf{A}_{*i} \boldsymbol{\varepsilon}_{*i} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i, \quad i \in \{x, y\}. \quad (2.38)$$

Рассмотрим задачу достижения целевого условия (2.37) при полной априорной информации о параметрах подсистемы S_1 и гипотетической возможности непосредственного управления выходным каскадом. Введем в рассмотрение $\mathbf{u}_*^{virt} = (u_{x*}^{virt} \quad u_{y*}^{virt})^T$ — «идеальное» виртуальное управление, подчеркивая его зависимость от параметров выходного каскада S_1 .

Выберем $\hat{m} = m$ и u_{i*}^{virt} в форме алгоритмов модального управления с компенсацией

$$u_{i*}^{virt} = m(\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i), \quad (2.39)$$

где $v_x = -\omega_x^{*2} x_m - \lambda_{0x} \varepsilon_x - \lambda_{1x} \dot{\varepsilon}_x$, $v_y = -\omega_y^{*2} y_m - \lambda_{0y} \varepsilon_y - \lambda_{1y} \dot{\varepsilon}_y$.

Вычислим производную по времени $w(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}_*, m)$ от целевого функционала $Q(\mathbf{e})$ при $u_i^{virt} = u_{i*}^{virt}$, $\hat{m} = m$. Имеем

$$\begin{aligned} w(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}_*, m) &= \mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \dot{\mathbf{e}}_y = \mathbf{e}_x^T \mathbf{A}_{*x} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{A}_{*y} \mathbf{e}_y \leq \\ &\leq -\rho_x 0,5 \mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \mathbf{e}_x - \rho_y 0,5 \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \mathbf{e}_y \leq -\rho Q(\mathbf{e}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $\mathbf{A}_{*x}$, $\mathbf{A}_{*y}$ — матрицы, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова

$$\mathbf{H}_i \mathbf{A}_{*i} + \mathbf{A}_{*i}^T \mathbf{H}_i = -\mathbf{G}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^T > 0, \quad i \in \{x, y\}, \quad (2.41)$$

$$\rho_i = \lambda_{\min}(\mathbf{G}_i) / \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i), \quad \rho = \min\{\rho_x, \rho_y\} > 0.$$

Следовательно, $Q(\mathbf{e}(t)) \leq Q(\mathbf{e}(0)) \cdot \exp(-\rho t)$, $Q(\mathbf{e}(t)) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и, в силу квадратичной формы $Q(\mathbf{e})$, получаем $\mathbf{e} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, при $u_i^{virt} = u_{i*}^{virt}$, $\hat{m} = m$ и любом отклонении траектории системы от многообразия $\sigma \equiv 0$ ЦУ (2.37) достигается.

Второй этап синтеза. Заменим в «идеальном» виртуальном управлении (2.39) неизвестные параметры θ_* настраиваемыми θ и m на $\hat{m}$. Получим настраиваемое виртуальное управление вида

$$u_i^{virt} = \hat{m}(\theta^T \mu_i + v_i). \quad (2.42)$$

Вычислим $w(\mathbf{e}, \theta, \hat{m})$ — скорость изменения по времени целевого функционала $Q(\mathbf{e})$.

Вычислим производную по времени от слагаемых $Q_i \triangleq 0,5 \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i$, $i \in \{x, y\}$ при $u_i = \sigma_i + u_i^{virt}$, где u_i^{virt} определяются из равенств (2.42)

$$\dot{Q}_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_i \\ -\theta_*^T \mu_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} \hat{m}(\theta^T \mu_i + v_i) - \mathbf{A}_{*i} \mathbf{e}_{*i} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i \right].$$

Для применения метода скоростного биградиента необходимо выполнение условия выпуклости производной от целевой функции по настраиваемым параметрам [22]

$$w(\mathbf{e}, \mathbf{p}) - w(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{p}}) \geq (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})^T \nabla_{\mathbf{p}} w(\mathbf{e}, \mathbf{p}), \quad (2.43)$$

где $\mathbf{p}$ — вектор настраиваемых параметров, — градиент.

Т.к. в правые части $\dot{Q}_i$ и, следовательно, в $w(\mathbf{e}, \theta, \hat{m})$, оцениваемая масса $\hat{m}$ входит не только линейно, но и в обратной форме (обратно пропорционально), следовательно, условие (2.43) не выполняется.

Проведем дополнительные преобразования с учётом (2.39), (2.40)

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &= \\
&= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{*i} \boldsymbol{\varepsilon}_{*i} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} \left(\hat{m} (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) \pm u_i^{virt} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i \right] = \\
&= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{A}_{*i} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} \left(\hat{m} (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) - u_i^{virt} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i \right] \leq \\
&\leq -\rho_i 0,5 \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i + \\
&+ \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} \left(\hat{m} (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) - m (\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) \pm m (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i \right] = \\
&= -\rho_i Q_i + \delta_i m^{-1} \left[(\hat{m} - m) (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) + m (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \boldsymbol{\mu}_i \right] + \delta_i \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \sigma_i,
\end{aligned}$$

где $\delta_i = e_i h_{12}^i + \dot{e}_i h_{22}^i$, $\mathbf{H}_i = (h_{kj}^i)$, $i \in \{x, y\}$; $j, k = 1, 2$ — матрицы, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова (2.41).

Окончательно, с учётом равенства (2.33) получаем

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &\leq -\rho_i Q_i + \delta_i (m\hat{m})^{-1} (\hat{m} - m) \left[\hat{m} (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) \right] + \delta_i (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \boldsymbol{\mu}_i + \delta_i \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \sigma_i = \\
&= -\rho_i Q_i + \delta_i \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) u_i^{virt} + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_i \boldsymbol{\mu}_i + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \delta_i \sigma_i = \\
&= -\rho_i Q_i + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \left(\delta_i (u_i^{virt} + \sigma_i) \right) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_i \boldsymbol{\mu}_i = \\
&= -\rho_i Q_i + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) (\delta_i u_i) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_i \boldsymbol{\mu}_i.
\end{aligned}$$

Таким образом, производная от целевой функции $Q(\mathbf{e})$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}) &\leq -\rho_x Q_x - \rho_y Q_y + \\
&+ (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \{ \delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y \} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \{ \delta_x u_x + \delta_y u_y \},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

в которую $\boldsymbol{\theta}$, $\hat{m}^{-1}$ входят линейно. Вычисляя скорость изменения по времени $w(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m})$ по настраиваемым параметрам $\boldsymbol{\theta}$, $\hat{m}$ и получаем алгоритмы адаптации в дифференциальной форме

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma \nabla_{\boldsymbol{\theta}} w(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}) = -\Gamma (\delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y), \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{m}}^{-1} &= -\gamma \nabla_{\hat{m}^{-1}} w(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}) = \gamma (\delta_x u_x + \delta_y u_y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{\hat{m}} &= -\gamma (\delta_x u_x + \delta_y u_y) \hat{m}^2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ — (7×7) матрица коэффициентов усиления (в частности $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i, i = \overline{1, 7}\}$, $\gamma_i > 0$), $\gamma > 0$, $\hat{m}(0) > 0$.

Третий этап синтеза. Введем дополнительную целевую функцию (2.23).

Вычислим скорость изменения целевой функции $R(\boldsymbol{\sigma})$ с учётом контура адаптации (2.45), (2.46)

$$\mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) \triangleq \dot{R}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{virt}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}), \quad (2.47)$$

где $\boldsymbol{\tau}^T = (\tau_1 \ \tau_2)$, $\tau_i = \dot{\hat{m}}(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) + \hat{m}(\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\theta}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}_i + \dot{v}_i)$, $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_x \ \sigma_y)$.

Вычисляя градиент по управлению $\mathbf{v}$ от функции $\mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$, получаем семейство релейных и гладких алгоритмов с коэффициентом усиления $\gamma_m > 0$;

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign}(\nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})) = -\gamma_m \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.48)$$

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = -\gamma_m \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.49)$$

обеспечивающих достижение целевого неравенства $R(\boldsymbol{\sigma}) \leq \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}$ при $t \geq t^*$.

Структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 2.43.

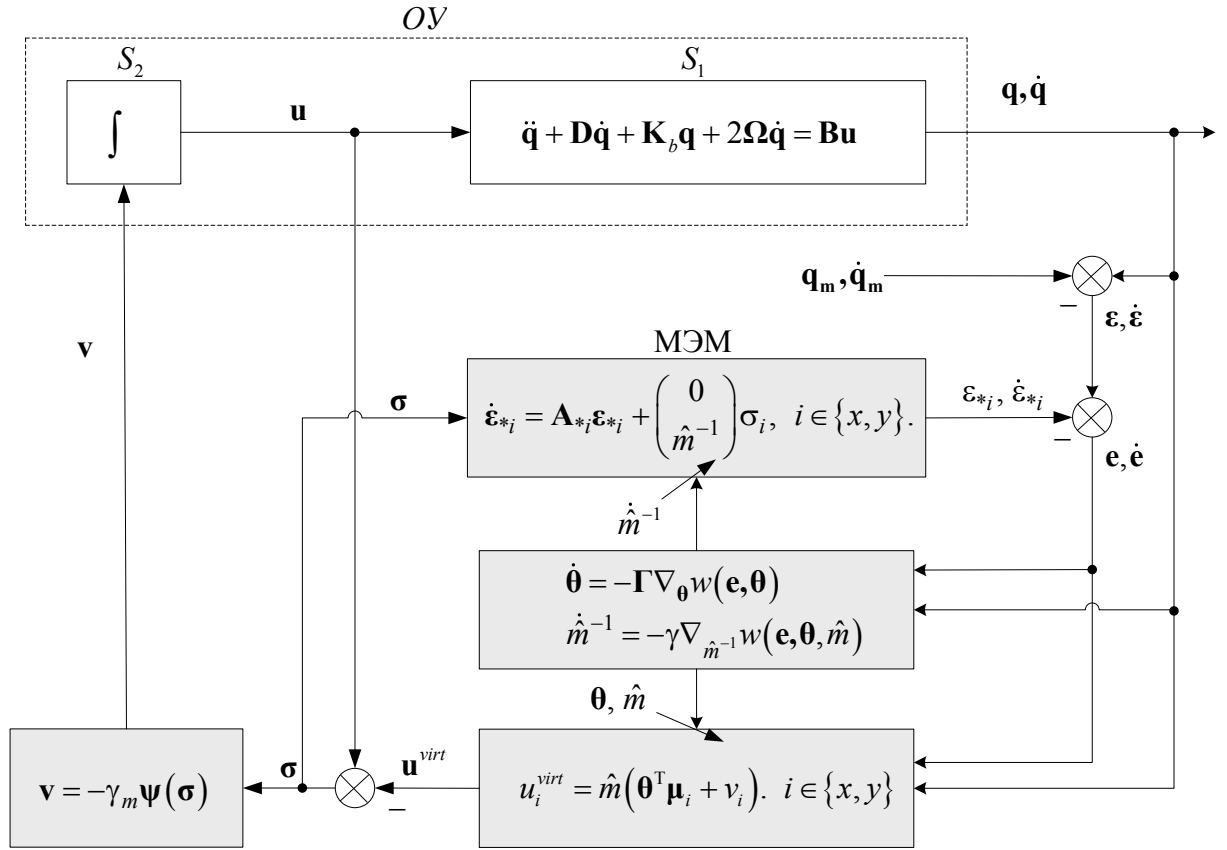


Рис. 2.43. Замкнутая адаптивная система управления

Теорема 2.2. Для системы (2.9), (2.31), (2.33), (2.35), (2.42), (2.45), (2.46), (2.24) справедливы утверждения:

1. При $\delta=1$ существует $\tilde{\gamma}_m > 0$ такое, что при $\gamma_m > \tilde{\gamma}_m$ цели управления (2.37), (2.23) достигаются при любых $\Delta_\epsilon > 0$, $\Delta_\sigma > 0$, все траектории замкнутой системы ограничены, $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ ($\mathbf{e} \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$. Существует момент времени t^* такой, что $R(\sigma) \equiv 0$ ($\sigma \equiv 0$) при $t \geq t^*$.

2. При $\delta > 1$ для любого $\Delta = \min\{\Delta_\epsilon, \Delta_\sigma\} > 0$ существуют $\bar{\gamma}_m(\Delta) > 0$ такое, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_m$ цели управления (2.37), (2.23) достигаются при любых $\Delta_\epsilon > 0$, $\Delta_\sigma > 0$, все траектории замкнутой системы ограничены. При $\gamma_m \rightarrow \infty$ справедливо: $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3. Существует функция Ляпунова вида

$$V(\mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}) = Q(\mathbf{e}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5 \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + 0,5 \gamma^{-1} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right)^2, \quad (2.50)$$

где $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_j\}$, $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1,7}$, $\gamma > 0$.

Достижение, в силу теоремы 2.2, целей управления (2.37), (2.23) с учётом замечания 1, означает достижения в замкнутой системе цели управления (2.32) при соответствующем выборе параметров ($\lambda_{jx} > 0$, $\lambda_{jy} > 0$, $j = 0,1$) модифицированной эталонной модели (2.35).

Следствие 2. Пусть в модифицированной эталонной модели (2.35) $\hat{m}$ — постоянный априорно заданный вектор и выполнены условия теоремы 2.2. Тогда для замкнутой системы с алгоритмом управления без подсистемы адаптации $\hat{m}$ (2.46) справедливы утверждения 1), 2) теоремы 2.2. и модифицированная эталонная модель (2.35) имеет вид

$$\dot{\mathbf{e}}_{*i} = \mathbf{A}_{*i} \mathbf{e}_{*i} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_i, \quad i \in \{x, y\}. \quad (2.51)$$

Для замкнутой системы существует функция Ляпунова вида (2.27)

$$V(\mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = Q(\mathbf{e}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5 \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2,$$

где $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$, $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1,7}$.

Теорему 2.2 можно рассматривать как следствие теоремы 1.2. Условия теоремы носят достаточный характер и могут быть ослаблены в ходе дальнейших исследований. Поэтому доказательство теоремы 2.2 методом функции Ляпунова приведено в приложении А.

2.3.3. Идентифицирующие свойства алгоритмов адаптивного управления

Анализ идентифицирующих свойств показывает, что θ_4 — оценка угловой скорости (Ω_z) и $\hat{m}$ линейно связаны (не отделимы при идентификации). Одновременная оценка массы чувствительного элемента ($\hat{m}$) и скорости вращения основания гироскопа (θ_4) оказалась невозможной. Попытка

улучшения идентифицирующие свойства за счёт обогащения спектра входного сигнала механической подсистемы и модифицированной модели не дала положительного эффекта. Поэтому в работе предложен вариант решения проблемы с предварительной оценкой массы чувствительного элемента на этапе заводских испытаний.

Алгоритм решения задачи идентификации параметров:

1. проведение стендовых испытаний на оборудовании, имитирующем заданную угловую скорость вращения основания виброгироскопа Ω_z^* на этапе завершения технологического цикла изготовления вибрационного гироскопа. При этом следует:
 - в алгоритме виртуального управления (2.42) положить $\theta_4 = \Omega_z^*$;
 - отключить алгоритм адаптации по параметру θ_4 в алгоритме (2.45);
 - оценить в процессе стендовых испытаний массу чувствительного элемента виброгироскопа ($\hat{m}$) и параметры θ_i , $i = \overline{1, 7}$, $i \neq 4$.
2. на этапе эксплуатации гироскопа, руководствуясь законом сохранения массы, использовать в алгоритме виртуального управления ранее полученную оценку массы ($\hat{m}$) с отключением алгоритма адаптации (2.46) и с включением алгоритма адаптации (2.45) (с настройкой θ_i , $i = \overline{1, 7}$).

2.3.4. Пример синтеза и результаты математического моделирования

Моделирование проводилось идентификацию по параметрам θ_2 , θ_4 , θ_6 (оценивание d_{xy} , Ω_z , ω_{xy}) и $\hat{m}$. Параметры d_{xx} , d_{yy} , ω_x^2 , ω_y^2 считаются известными. Выбирая $\mathbf{A}_{*i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $i = \{x, y\}$, получаем $\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. При данных предположениях релейный алгоритм управления имеет вид

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.52)$$

$$\text{где } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{virt}, \quad \mathbf{u}^{virt} = \begin{pmatrix} \hat{m}(d_{xx}\dot{x} + (\theta_2 - 2\theta_4)\dot{y} + \omega_x^2 x + \theta_6 y - \omega_1^2 x_m - 2\dot{e}_x - e_x) \\ \hat{m}(d_{yy}\dot{y} + (\theta_2 + 2\theta_4)\dot{x} + \theta_6 x + \omega_y^2 y - \omega_2^2 y_m - 2\dot{e}_y - e_y) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma_2(\delta_x \dot{y} + \delta_y \dot{x}), \quad \dot{\theta}_4 = -\gamma_4(\delta_y \dot{x} - \delta_x \dot{y}), \quad \dot{\theta}_6 = -\gamma_6(\delta_x y + \delta_y x),$$

$$\dot{\hat{m}} = -\gamma_p(\delta_x u_x + \delta_y u_y)\hat{m}^2, \quad \delta_i = e_i + \dot{e}_i, i = x, y.$$

Моделирование проводилось при $x_m = 0.3 \cos \omega_x^* t$, $y_m = 0.5 \sin \omega_y^* t$, $\boldsymbol{\eta}^T = (0.8 \sin(40\pi t) \quad 0.8 \cos(40\pi t))$ и параметрах объекта управления и модифицированной эталонной модели моделирования приведены в таблице 2.1.

Результаты математического моделирования системы управления с релейным алгоритмом управления (2.48) при $\gamma_m = 6$ и параметры регулятора приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Параметры регулятора

γ_2	4.5
γ_4	8
γ_6	3
γ	0.1

Результаты математического моделирования 1-го этапа идентификации ($\theta_4 = \Omega_z$) представлены на рис. 2.44 — рис. 2.51, где наблюдается хорошая сходимость траектории объекта управления к желаемым колебаниям чувствительного элемента, достаточно быстрый выход на многообразие скольжения, хорошие идентифицирующие свойства по $\hat{m}$, θ_2 , θ_6 .

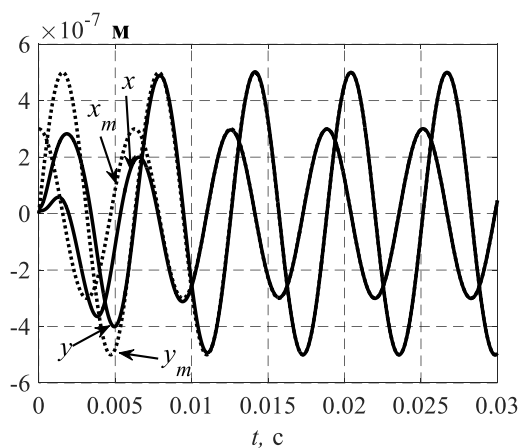


Рис. 2.44. Траектории объекта и генерирующей модели

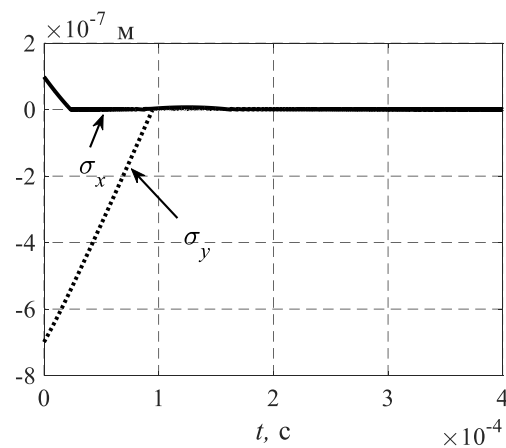


Рис. 2.47. Отклонение от многообразия скольжения

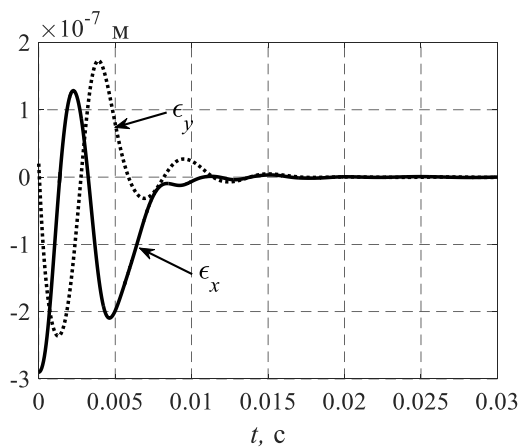


Рис. 2.45. Ошибки слежения

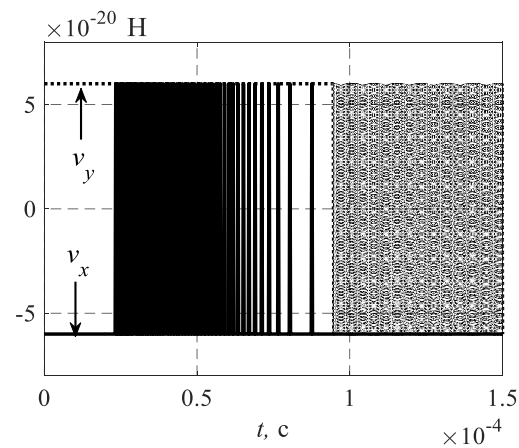


Рис. 2.48. Управления

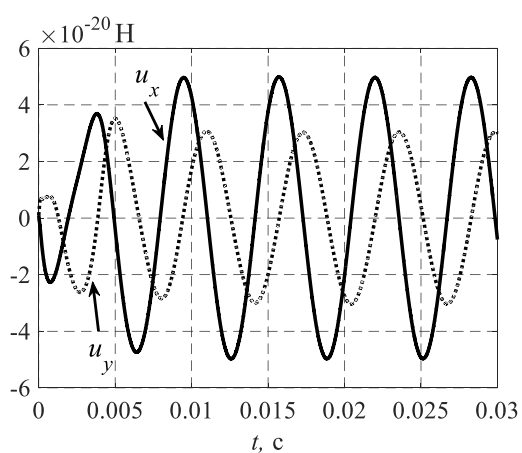


Рис. 2.46. Входы гироскопа

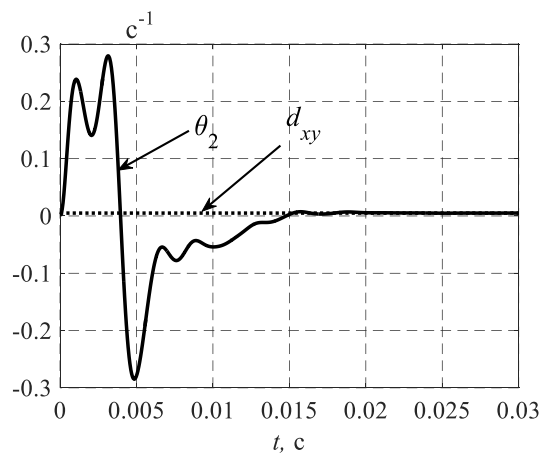


Рис. 2.49. Результаты идентификации параметра d_{xy}

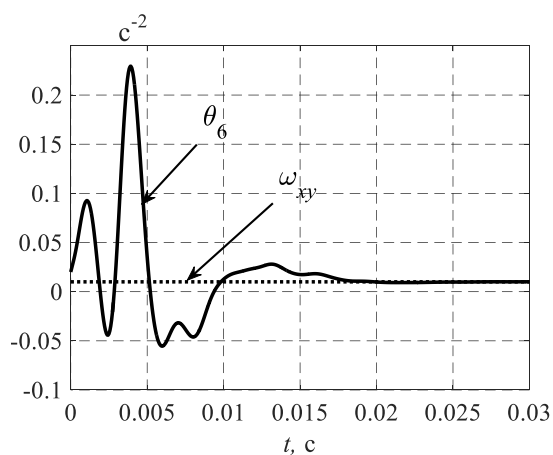


Рис. 2.50. Результаты
идентификации параметра ω_{xy}

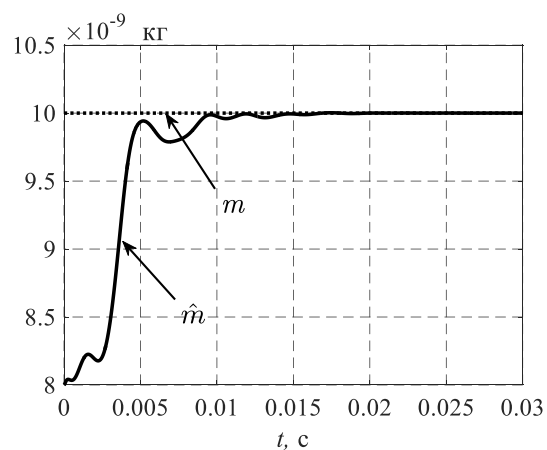


Рис. 2.51. Результаты
идентификации параметра m

Результаты математического моделирования 2-го этапа идентификации ($\hat{m} = m$) представлены на рис. 2.52 — рис. 2.59, где наблюдается хорошая сходимость траектории объекта управления к желаемым колебаниям чувствительного элемента, достаточно быстрый выход на многообразие скольжения, хорошие идентифицирующие свойства по $\theta_2, \theta_4, \theta_6$.

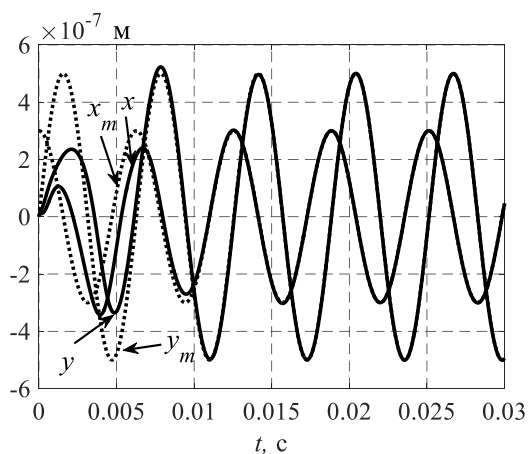


Рис. 2.52. Траектории объекта и
генерирующей модели

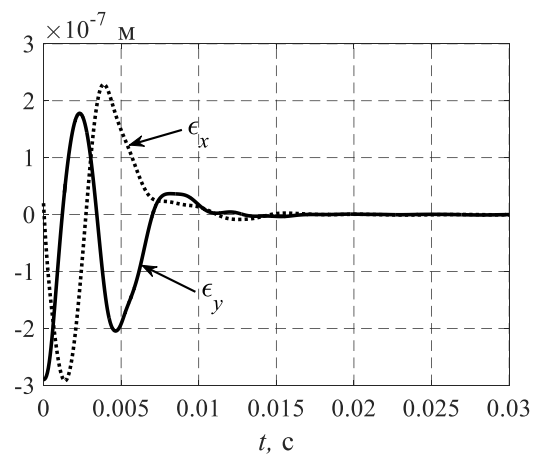


Рис. 2.53. Ошибки слежения

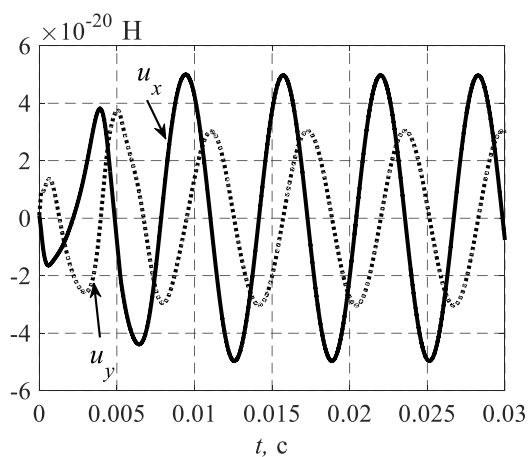


Рис. 2.54. Входы гироскопа

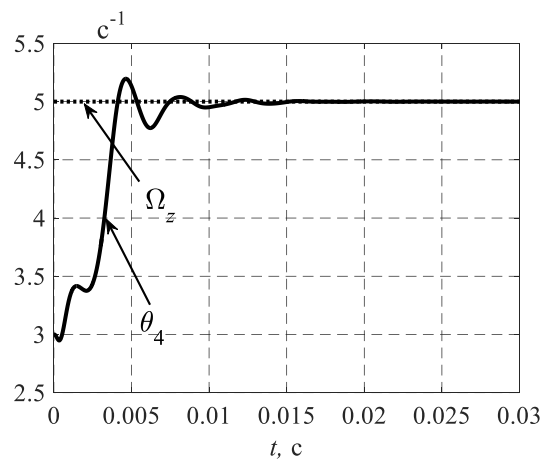


Рис. 2.57. Результаты идентификации
угловой скорости Ω_z

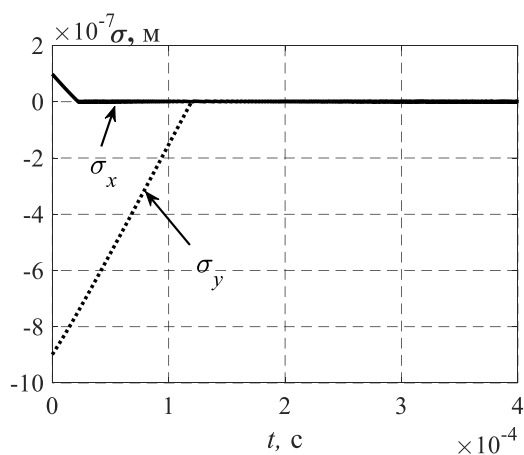


Рис. 2.55. Отклонение от
многообразия скольжения

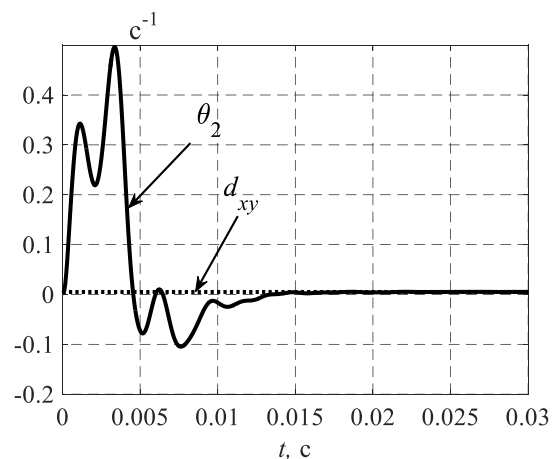


Рис. 2.58. Результаты идентификации
параметра d_{xy}

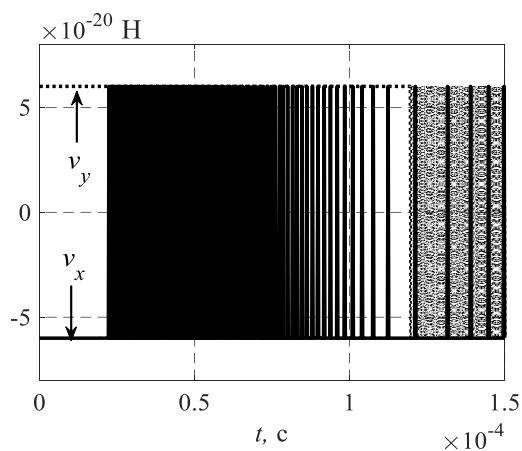


Рис. 2.56. Управления

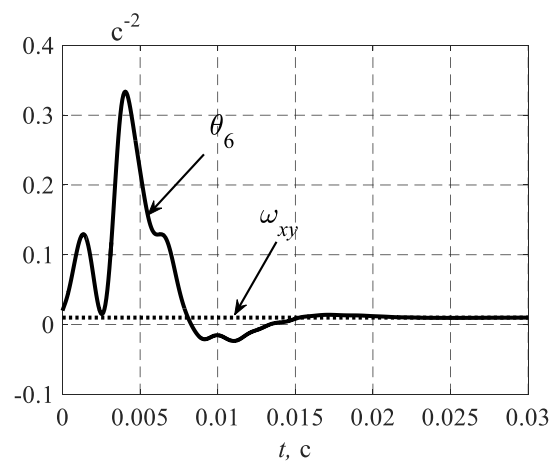


Рис. 2.59. Результаты идентификации
параметра ω_{xy}

Выше представлены результаты синтеза алгоритмов управления вибрационным гироскопом с модифицированной эталонной моделью. Очевидно из результатов, что модифицированная эталонная модель позволяет высокую точность слежения за желаемой динамикой конечного каскада при ограниченности траекторий замкнутой системы и снизить энергические затраты на управление.

2.3.5. Сравнительный анализ алгоритмов управления с ЯЭМ и МЭМ

Результаты сравнительного анализа с системами ЯЭМ (2.9), (2.11), (2.13), (2.20), (2.21), (2.22) с релейным алгоритмом управления (2.28) и системами МЭМ (2.9), (2.11), (2.35), (2.42), (2.45), (2.51) с релейным алгоритмом управления (2.48) приведены на рис. 2.60 — рис. 2.64.

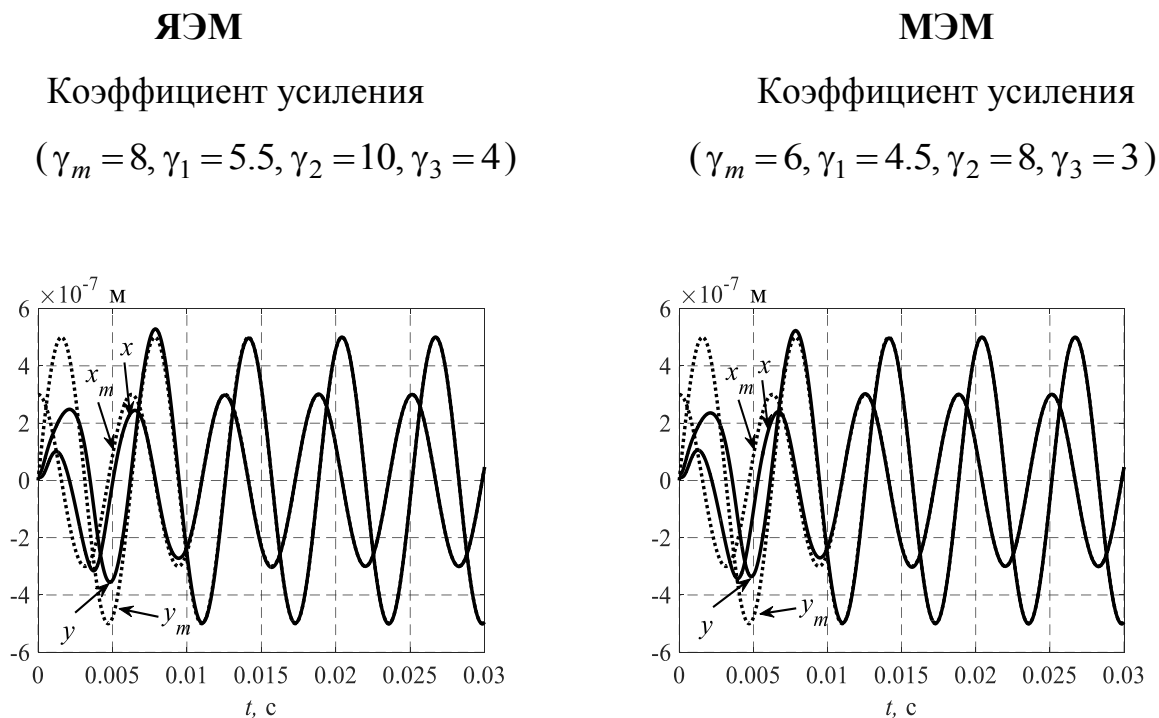


Рис. 2.60. Траектории объекта и генерирующей модели

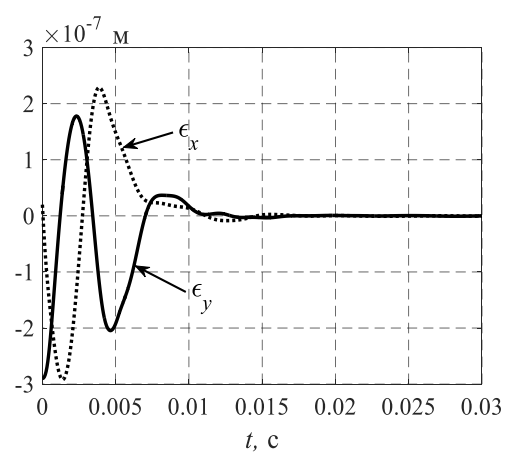
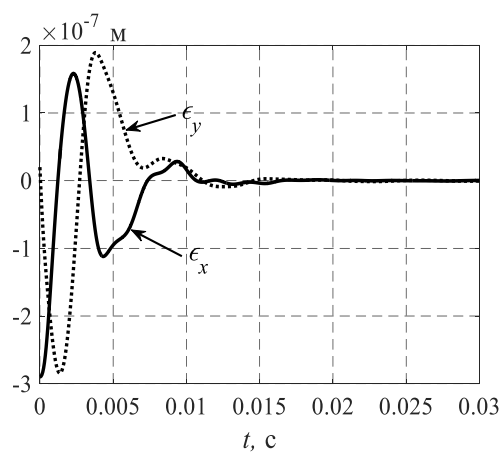


Рис. 2.61. Ошибки слежения

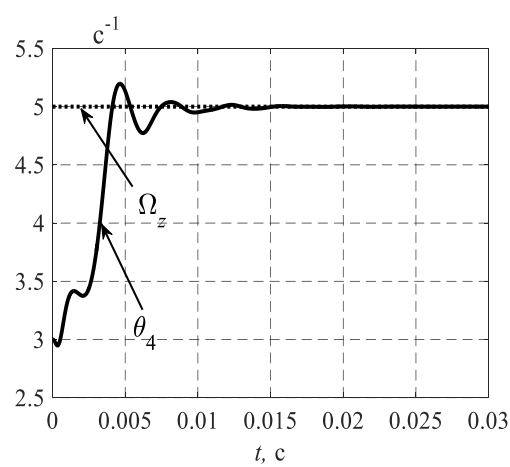
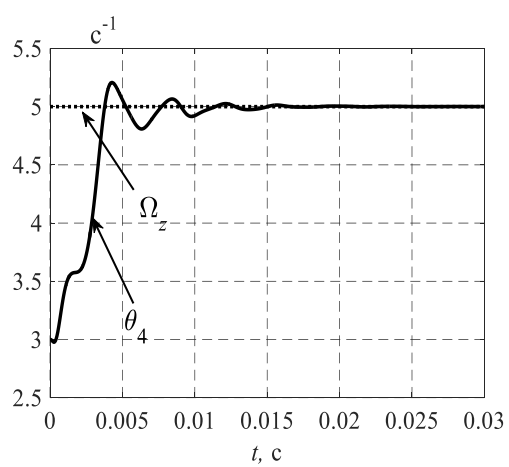


Рис. 2.62. Результаты идентификации угловой скорости Ω_z

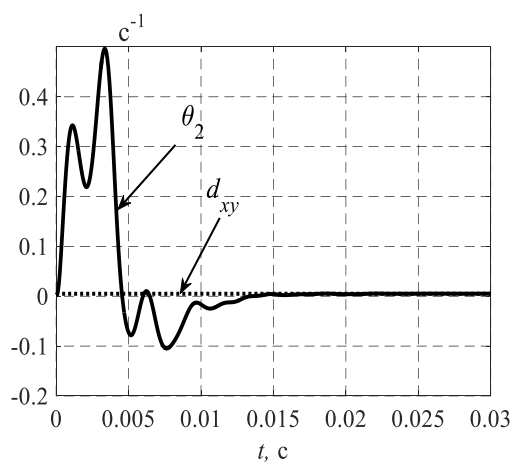
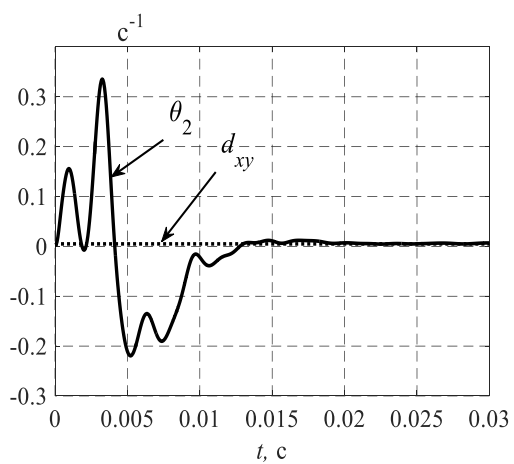


Рис. 2.63. Результаты идентификации параметра d_{xy}

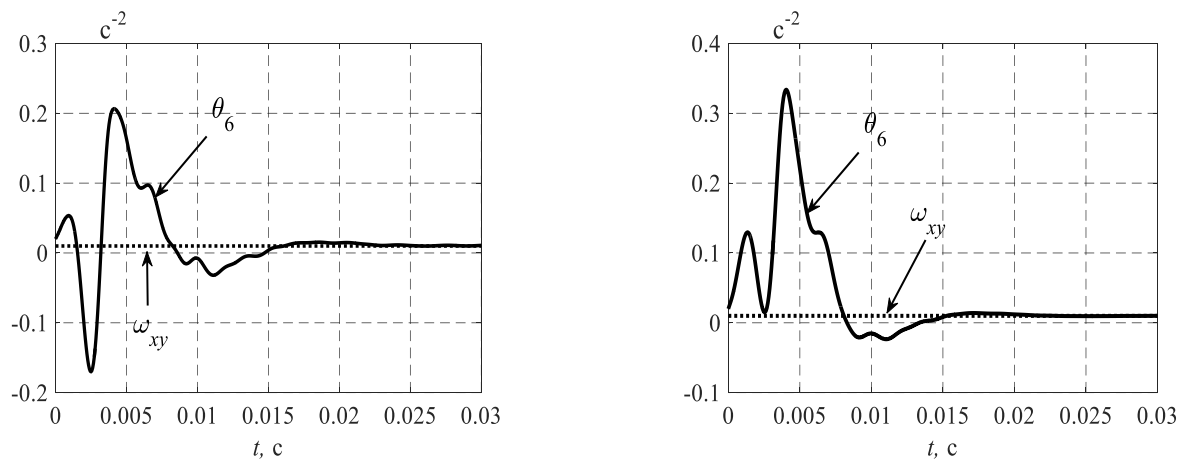


Рис. 2.64. Результаты идентификации параметра ω_{xy}

Качество сходимости и идентификация параметров МЭМ близки к результату с ЯЭМ. Однако, алгоритмы с модифицированной эталонной моделью обеспечивают сходные показатели качества движения чувствительного элемента и оценивания параметров при меньших коэффициентах усиления релейного управления (на 25%) и коэффициентах усиления в алгоритме адаптации (2.45).

2.4. Синтез алгоритма настраиваемого скользящего режима для одноосного вибрационного гироскопа с динамически изменяемым коэффициентом усиления

В данном разделе рассматривается алгоритм управления на основе метода скоростного биградиента с динамически изменяемым коэффициентом усиления в задаче управления одноосным вибрационным гироскопом.

2.4.1. Постановка задачи синтеза. Синтез алгоритма

Вернёмся к постановке задачи и её решению, приведённым в разделе 2. Для объекта управления (2.11) с генерирующей моделью (2.9) требуется обеспечить ограниченность траекторий замкнутой системы и достижение целевого неравенства (2.10). В результате первых двух этапов синтеза алгоритм виртуального управления имеет вид

$$u_i^{virt} = \theta^T \mu_i + v_i, \quad (2.53)$$

а алгоритм адаптации описывается в виде

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} w(\varepsilon, \theta) = -\Gamma (\delta_x \mu_x + \delta_y \mu_y). \quad (2.54)$$

Рассмотрим более детально третий этап синтеза.

Третий этап синтеза. Выберем отклонение от пересечения многообразий гиперповерхностей $\sigma \equiv 0$ в форме (2.22)

$$\sigma = u - u^{virt} \quad (2.55)$$

и выберем алгоритм управления настраиваемого скользящего режима (2.25) запишем в форме

$$v = -\gamma_m \text{sign}(\nabla_v \mu(\sigma, v)) = -\gamma_m \text{sign}(\sigma). \quad (2.56)$$

Динамически изменяемый коэффициент усиления γ_m реализуется согласно следующему алгоритму (см. (1.47), (1.48)):

$$\text{если } |\sigma| \neq 0, \text{ то} \quad \gamma_m = \frac{k_1}{D} |\sigma|, \quad (2.57)$$

$$\text{если } |\sigma| = 0, \text{ то} \quad \gamma_m = k_2 |\dot{n}| + k_3, \tau \dot{n} + n = \text{sign}(\sigma), 0 < \tau \ll 1, \quad (2.58)$$

где $D = d/dt$, $\gamma_m(0) > 0$, $\mathbf{n} > 0$, $k_1 > 0$, $k_3 > 0$, $k_2 = \gamma_m(t^*)$, t^* моменты времени: $\sigma(t^*) = 0$.

Структурная схема системы управления вибрационным гироскопом с релейным управлением представлена на рис. 2.65.

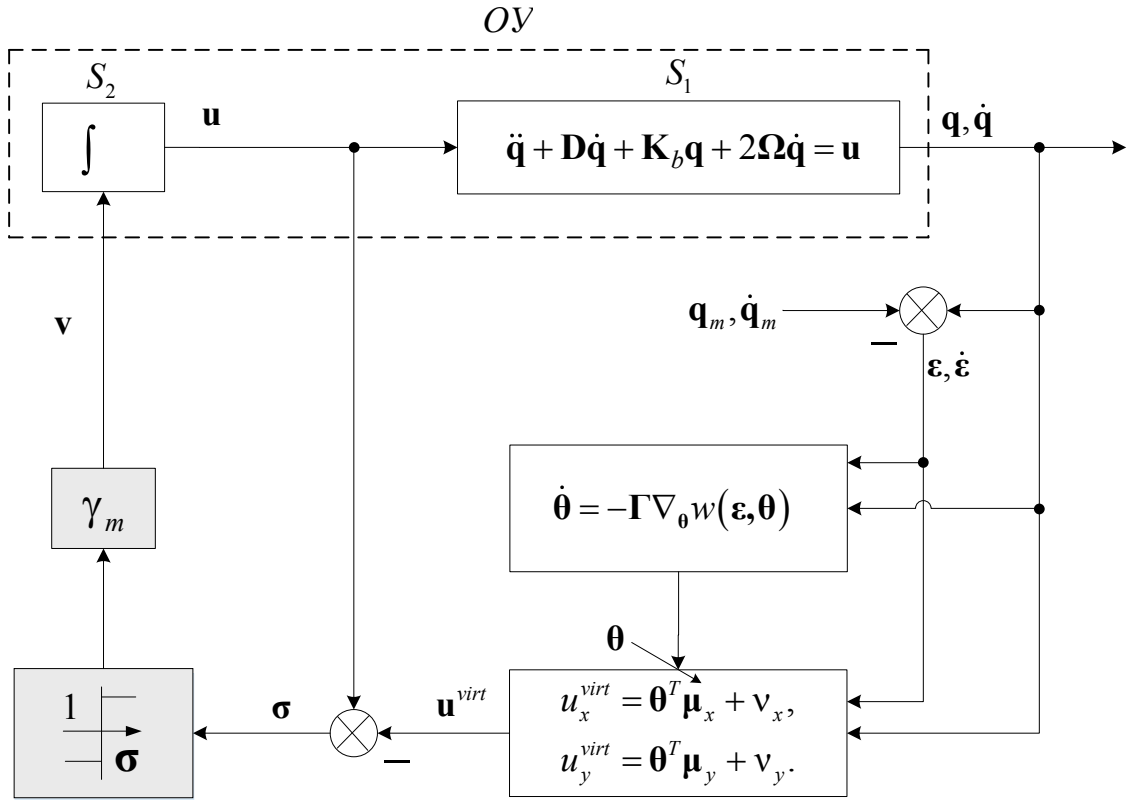


Рис. 2.65. Замкнутая адаптивная система управления

Теорема 2.3. Для замкнутой системы (2.9), (2.11), (2.13), (2.53), (2.54), (2.55) с алгоритмом управления (2.56) с динамически изменяемым коэффициентом усиления (2.57), (2.58) существуют $k_i > 0, i = \overline{1,3}$ такие, что все траектории замкнутой системы ограничены и достигаются цели управления (2.15), (2.23). Существует момент времени t_r такой, что $\sigma \equiv 0$ при $t \geq t_r$. $Q(\epsilon) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \epsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Алгоритм адаптации (2.54) обладает идентифицирующими свойствами: $\theta \rightarrow \theta_*$ при $t \rightarrow \infty$.

Существует функция Ляпунова вида

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, \gamma_m) = Q(\boldsymbol{\varepsilon}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5 \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + 0,5 \gamma^{-1} (\gamma_m - \gamma_m^*)^2, \quad (2.59)$$

где $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_j\}$, $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1, 7}$, $\gamma > 0$, $\gamma_m^* : \|\boldsymbol{\eta} - \dot{\mathbf{u}}^{\text{virt}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta})\| \leq \gamma_m^*$ при $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}) \in \chi \subset R^{11}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\eta} - \dot{\mathbf{u}}^{\text{virt}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}$ — уравнение невязки в силу (2.22).

Теорему 2.3 можно рассматривать как следствие теоремы 1.4. Условия теоремы носят достаточный характер и могут быть ослаблены в ходе дальнейших исследований. Поэтому доказательство теоремы 2.3 методом функции Ляпунова приведено в приложении А.

2.4.2. Пример синтеза и результаты математического моделирования

Моделирование проводилось идентификацию по параметрам $\theta_2, \theta_4, \theta_6$ (оценивание $d_{xy}, \Omega_z, \omega_{xy}$). Параметры $d_{xx}, d_{yy}, \omega_x^2, \omega_y^2$ считаются известными. Выбирая $\mathbf{A}_{*i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $i = \{x, y\}$, получаем $\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. При данных предположениях алгоритм управления настраиваемого скользящего режима имеет вид

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}),$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{virt}}$, $\mathbf{u}^{\text{virt}} = \begin{pmatrix} d_{xx}\dot{x} + (\theta_2 - 2\theta_4)\dot{y} + \omega_x^2 x + \theta_6 y - \omega_1^2 x_m - 2\dot{e}_x - e_x \\ d_{yy}\dot{y} + (\theta_2 + 2\theta_4)\dot{x} + \theta_6 x + \omega_y^2 y - \omega_2^2 y_m - 2\dot{e}_y - e_y \end{pmatrix}$,

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma_2 (\delta_x \dot{y} + \delta_y \dot{x}), \quad \dot{\theta}_4 = -\gamma_4 (\delta_y \dot{x} - \delta_x \dot{y}), \quad \dot{\theta}_6 = -\gamma_6 (\delta_x y + \delta_y x),$$

$\delta_i = e_i + \dot{e}_i$, $i = x, y$, γ_m — динамически изменяемый коэффициент усиления реализуется алгоритму (2.57), (2.58) и параметры регулятора приведены в таблице 2.2. Моделирование проводилось при $x_m = 0.3 \cos \omega_x^* t$, $y_m = 0.5 \sin \omega_y^* t$, $\boldsymbol{\eta}^T = (0.8 \sin(40\pi t) \quad 0.8 \cos(40\pi t))$ и параметрах объекта управления и спектральной модели моделирования приведены в таблицах 2.1–2.2.

Результаты математического моделирования системы управления приведены на рис. 2.66 — рис. 2.74.

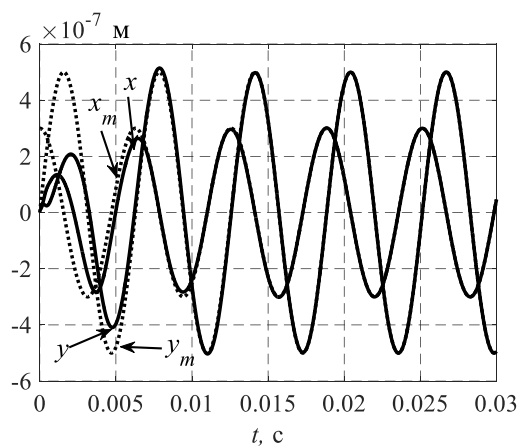


Рис. 2.66. Траектории объекта и генерирующей модели

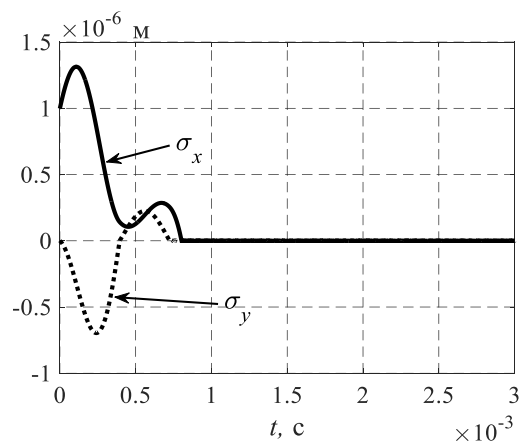


Рис. 2.69. Отклонения от многообразия скольжения

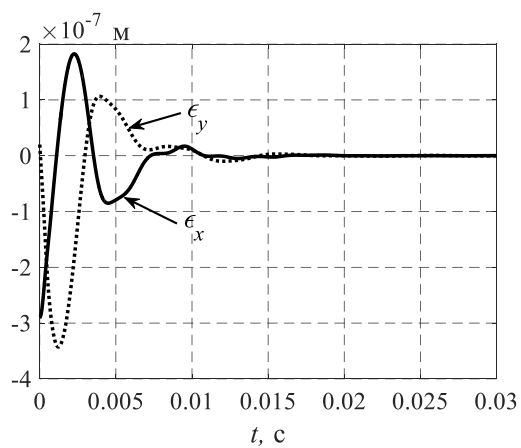


Рис. 2.67. Ошибки слежения

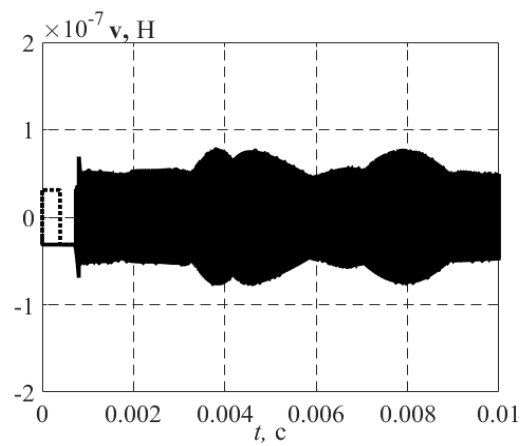


Рис. 2.70. Управления

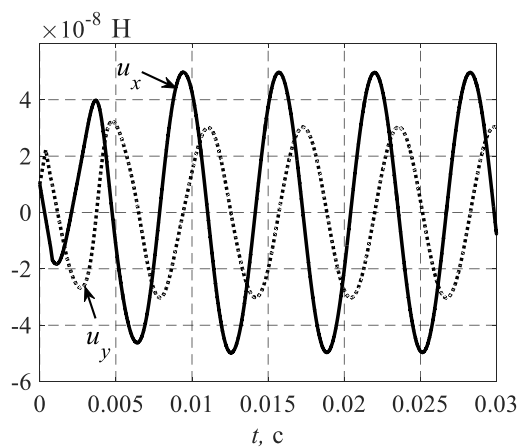


Рис. 2.68. Входы гироскопа

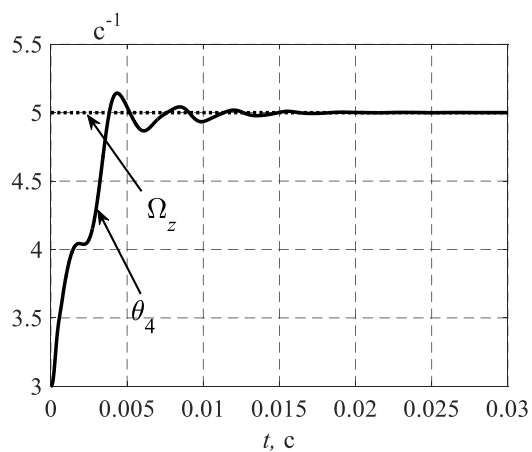


Рис. 2.71. Результаты идентификации параметра Ω_z

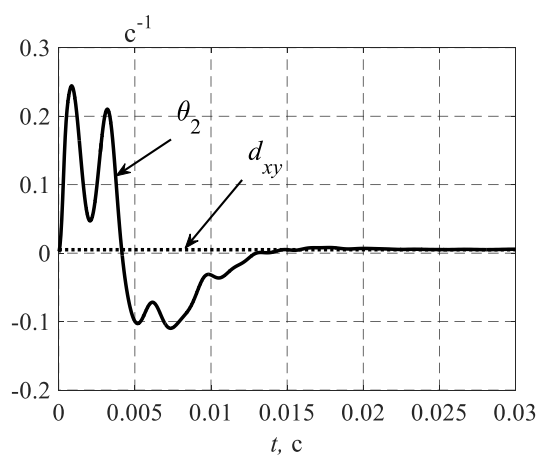


Рис. 2.72. Результаты идентификации параметра d_{xy}

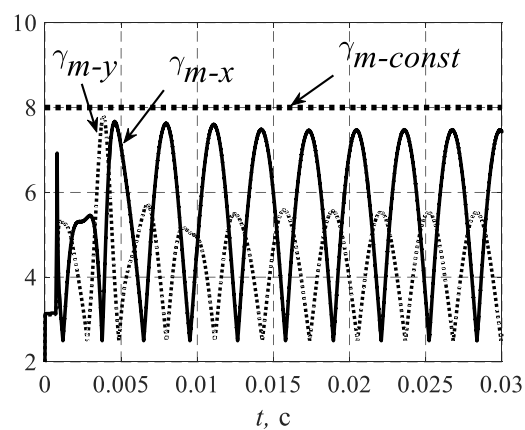


Рис. 2.74. Результаты с динамически изменяемым коэффициентом усиления

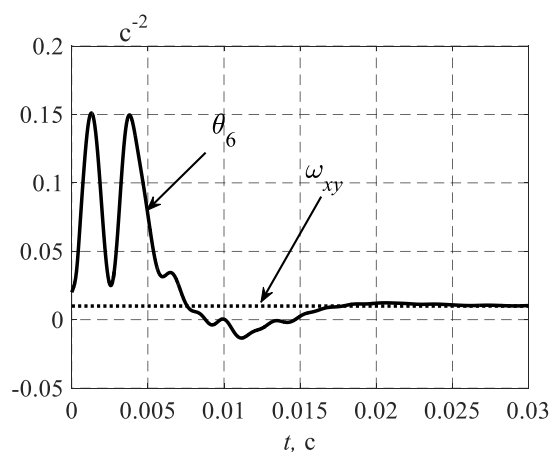


Рис. 2.73. Результаты идентификации параметра ω_{xy}

Как видно из рис. 2.66 — рис. 2.73 алгоритм управления обеспечивает возникновение желаемых колебаний чувствительного элемента вибрационного гироскопа и идентификацию параметров, включая скорость вращения основания. На рис. 2.74 приведены значения постоянных и переменных коэффициентов усиления, при которых достигается близкое качество управления чувствительным элементом гироскопа и идентификации параметров.

Очевидно, что при любом $T > 0$ $\int_0^T \gamma_{m-i} d\tau < \gamma_{m-const}$, $i = \{x, y\}$. Следовательно,

использование динамически изменяемых коэффициентов усиления релейных алгоритмов позволяет снизить энергетические затраты на управление.

Для одноосного вибрационного гироскопа с интегратором методом скоростного биградиента синтезирован релейный алгоритм управления с настраиваемыми многообразиями и динамически изменяемым коэффициентом усиления. Синтезированный алгоритм обеспечивает экономию энергетических затрат на управление, гладкость сил, воздействующих на чувствительную массу гироскопа, возникновение настраиваемого скользящего режима. Алгоритм обладает идентифицирующими свойствами.

2.5. Сравнительный анализ алгоритмов адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом

В таблице 2.1. представлены синтезированные алгоритмы адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом с явной, модифицированной эталонной моделью конечного каскада и динамически изменяемым коэффициентом усиления.

Таблица 2.4

Адаптивное управление одноосным вибрационным гироскопом

№	Постановка задачи		
	ОУ: $S_1: \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_b\mathbf{q} + 2\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}\mathbf{u},$ $S_2: \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}.$ (2.31)	ЦУ: $\begin{cases} Q(\mathbf{e}) \leq \Delta_{\mathbf{e}}, \forall t \geq t_* \\ R(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} \leq \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}, \forall t \geq t^* \end{cases}$ (60)	
	ГМ: $\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_m\mathbf{q}_m = 0,$ $\mathbf{q}_m(0) \neq 0.$ (2.9)	$Q(\mathbf{e}) = 0,5 \cdot (\mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \mathbf{e}_y),$ $\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_{*i}, \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T > 0, i \in \{x, y\}.$ ДЦУ: $\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_*, \hat{m} \rightarrow m$ при $t \rightarrow \infty.$	
1	Алгоритм с явной эталонной моделью (ЯЭМ)		
	Эталонная модель	Алгоритмы управления	Условия и результат сходимости
	ЯЭМ: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{*i} = \mathbf{A}_{*i}\boldsymbol{\varepsilon}_{*i},$ (2.13)	$u_i^{virt} = \boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i,$ (2.20) $\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma \nabla_{\boldsymbol{\theta}} w(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}),$ (2.21)	(2.25): $\exists \gamma_m \geq \tilde{\gamma}_m + \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_0 > 0:$ $\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv 0, \forall t \geq t^*, t^* \leq 2/\tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}_0)},$

	1	2	3
	$\text{Re}\lambda_{ji}^*(\mathbf{A}_{*i}) < 0, \tilde{j} = 1, 2,$ $i \in \{x, y\}.$	$\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma_i, i = \overline{1, 7}\}, \gamma_i > 0.$ $\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}),$ (2.25) или $\mathbf{v} = -\gamma_m \cdot \boldsymbol{\sigma},$ (2.26) $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{virt}, \gamma_m > 0.$	$\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0, \boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_* (t \rightarrow \infty).$ (2.26): $\exists \gamma_m \geq \bar{\gamma}_m : \text{ЦУ (60) вып.};$ $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow 0, \mathbf{e} \rightarrow 0, \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0, \boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_*,$ $(t \rightarrow \infty, \gamma_m \rightarrow \infty).$ $V(\cdot) = Q(\mathbf{e}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5 \ \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\ _{\Gamma^{-1}}^2.$
2	Алгоритм с модифицированной эталонной моделью (МЭМ)		
	МЭМ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{*i} = \mathbf{A}_{*i} \boldsymbol{\varepsilon}_{*i} + \mathbf{b}_{\sigma} \sigma_i,$ (2.35) $\sigma_i = u_i - u_i^{virt}, \mathbf{b}_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{m}^{-1} \end{pmatrix}$ $\text{Re}\lambda_{ji}^*(\mathbf{A}_{*i}) < 0, \tilde{j} = 1, 2,$ $i \in \{x, y\}.$	$u_i^{virt} = \hat{m}(\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i),$ (2.42) $\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{\Gamma} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} w(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}),$ (2.45) $\dot{\hat{m}} = -\gamma(\delta_x u_x + \delta_y u_y) \hat{m}^2,$ (2.46) $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma_i, i = \overline{1, 7}\}, \gamma_i > 0, \gamma > 0.$ $\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign}(\boldsymbol{\sigma}),$ (2.48) или $\mathbf{v} = -\gamma_m \cdot \boldsymbol{\sigma},$ (2.49) $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{virt}, \gamma_m > 0.$	(2.48): $\exists \gamma_m \geq \tilde{\gamma}_m + \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_0 > 0:$ $\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv 0, \forall t \geq t^*, t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}_0)},$ $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0, \boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_*, \hat{m} \rightarrow m (t \rightarrow \infty).$ (2.49): $\exists \gamma_m \geq \bar{\gamma}_m : \text{ЦУ (60) вып.};$ $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow 0, \mathbf{e} \rightarrow 0, \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0, \boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_*, \hat{m} \rightarrow m$ $(t \rightarrow \infty, \gamma_m \rightarrow \infty).$ $V(\cdot) = Q(\mathbf{e}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5 \ \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\ _{\Gamma^{-1}}^2 +$ $+ 0,5 \gamma^{-1} (m^{-1} - \hat{m}^{-1})^2.$

	1	2	3
3	Алгоритм с динамически изменяемый коэффициент усиления и ЯЭМ		
	ЯЭМ $\dot{\mathbf{\epsilon}}_{*i} = \mathbf{A}_{*i} \mathbf{\epsilon}_{*i}, \quad (2.13)$ $\operatorname{Re} \lambda_{ji}^*(\mathbf{A}_{*i}) < 0, \tilde{j} = 1, 2,$ $i \in \{x, y\}.$	$u_i^{virt} = \mathbf{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i, \quad (2.53)$ $\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{\Gamma} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} w(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\theta}), \quad (2.54)$ $\mathbf{\Gamma} = \operatorname{diag} \{ \gamma_i, i = \overline{1, 7} \}, \gamma_i > 0,$ $\mathbf{v} = -\gamma_m \operatorname{sign}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.56)$ $\gamma_m \text{ реализуется по алгоритму (2.57),}$ $(2.58), \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{virt}.$	$(2.56): k_i > 0, i = \overline{1, 3},$ $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0 \text{ при } t \geq t_r, \quad t_r \leq 2R(\boldsymbol{\sigma}_0)^{1/2} / \beta,$ $\beta = \sqrt{2} \min \{ \beta_{\boldsymbol{\sigma}}, \beta_k \sqrt{\gamma} \},$ $\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow 0, \quad \boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_* \quad (t \rightarrow \infty).$ $V(\bullet) = Q(\boldsymbol{\epsilon}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5 \ \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\ _{\mathbf{\Gamma}^{-1}}^2 +$ $+ 0,5 \gamma^{-1} (\gamma_m - \gamma_m^*)^2.$

2.6. Выводы по главе 2

В разделе 2.1 представлены физические основы функционирования МЭМС вибрационных гироскопов, подробный обзор существующих методов управления, классификация данных устройств, выбор математической модели и постановка задачи управления в режиме идентификации угловой скорости виброгироскопа.

В разделе 2.2 для одноосного вибрационного гироскопа с интегратором методом скоростного биградиента синтезированы гладкие, релейные и комбинированные алгоритмы управления с настраиваемыми многообразиями. Синтезированные алгоритмы обеспечивают гладкость сил, воздействующих на чувствительную массу гироскопа, отработку желаемой траектории движения чувствительного элемента, идентификацию параметров, включая оценку угловой скорости вращения основания.

В разделе 2.3 представлена методика синтеза и алгоритмы адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом с модифицированной эталонной моделью конечного каскада. Анализ устойчивости замкнутой системы показывает, что введение в эталонную модель слагаемого, пропорционального отклонению траектории системы от многообразия скольжения (невязка между входом механической подсистемы и адаптивным виртуальным управлением) позволяет снизить энергические затраты на управление. Введение адаптации в модифицированную модель улучшает динамику идентификации неизвестных параметров вибрационного гироскопа и позволяет дополнительно оценивать массу чувствительного элемента.

В разделе 2.4 для одноосного вибрационного гироскопа методом скоростного биградиента синтезирован релейный алгоритм управления с настраиваемыми многообразиями и динамически изменяемым коэффициентом усиления. Синтезированный алгоритм обеспечивает экономию энергетических затрат на управление и обладает идентифицирующими свойствами, включая оценивание угловой скорости вращения основания.

В разделе 2.5 представлен сравнительный анализ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Использование идеи генерации желаемой спектральной динамики конечного каскада позволяет существенно повысить точность решения задачи слежения. Разработаны методики синтеза и синтезированы релейные, гладкие и комбинированные алгоритмы адаптивного управления для линейных двухкаскадных систем с желаемой спектральной динамикой конечного каскада, с явной и модифицированной эталонной моделью скорости сходимости траекторий замкнутой системы к траектории генерирующей системы, с адаптацией параметров в дифференциальной и конечной формах. Алгоритмы отличаются по свойствам достижения целей управления и идентификации.
2. Алгоритмы управления в релейной форме с явной эталонной моделью скорости сходимости и адаптацией в дифференциальной форме обеспечивают ограниченность траекторий замкнутой системы, возникновение (за конечный промежуток времени) настраиваемого скользящего режима, асимптотическое слежение вектора состояния конечного каскада за вектором, сформированным из желаемого задающего сигнала и его производных, обладают идентифицирующими свойствами.
3. При использовании алгоритмов адаптации в конечной форме наблюдается повышение скорости парирования координатных возмущений, но отсутствует возможность идентификации параметров.
4. Гладкие алгоритмы управления, по сравнению с релейными алгоритмами, экономичнее (по энергетическим затратам на управление), но обеспечивают конечную точность слежения и идентификации, и лишь в пределе (при бесконечно большом коэффициенте усиления по управлению) асимптотическое стремление к нулю ошибок слежения и идентификации.
5. Использование модифицированной модели скорости сходимости позволяет расширить спектр идентифицируемых параметров, улучшить условия идентификации, снизить затраты на управление. Взамен – требуется реализация модифицированной модели в контуре управления, расширяется размер-

ность подсистемы адаптации.

6. Использование динамически изменяемого коэффициента при релейном управлении позволяет в системе с НСР существенно снизить энергетические затраты на управление, однако - усложняет структуру алгоритма управления.

7. В основе синтеза алгоритмов управления с генерирующей моделью желаемой динамики конечного каскада, с явной, модифицированной моделью, с адаптацией в конечной и дифференциальной форме лежит единая функция Ляпунова, что позволяет комбинировать алгоритмы в виде их линейных комбинаций или в форме систем с переменной структурой.

8. Разработанные методики синтеза позволили синтезировать класс алгоритмов управления одноосным вибрационным гироскопом (с учётом динамики приводов) с обеспечением желаемой динамики вращения чувствительного элемента, с идентификацией параметров механической подсистемы и оценивания угловой скорости вращения основания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андриевский Б.Р., Стоцкий А.А., Фрадков А.Л. Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации // Автоматика и телемеханика. – 1988. – №12. – С. 3–39.
2. Ачилдиев, В. М. Микромеханический вибрационный гироскоп-акселерометр / В. М. Ачилдиев, В. Н. Дрофа, В. М. Рублев. Микросистемная техника, 2001, №5, с. 8–10.
3. Бойчук О.Ф., Збруцкий А.В., Павловский М.А. Уравнения движения многоколенных динамически настраиваемых гироскопов // Механика гироскопических систем. — 1985. — Вып. № 4. — С. 3—11.
4. Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л. Вибрационные гироскопы. — М.: Машиностроение, 1970. — 216 с.
5. Бугров Д.И. Одноосный вибрационный гироскоп // Фундаментальная и прикладная математика. — Москва. — 2005. — Том 11. — № 8. — С. 149—163.
6. Воронов А.А., Рутковский В.Ю. Современное состояние и перспективы развития адаптивных систем. // Вопросы кибернетики. Проблемы теории и практики адаптивного управления. – М.: Научный совет по кибернетике АН СССР. – 1985. – С. 5–48.
7. Дрожжин А. MEMS: микроэлектромеханические системы // <http://www.3dnews.ru/600098>.
8. Евстифеев, М. И. Погрешности микромеханического гироскопа на вибрирующем основании / М. И. Евстифеев. Гироскопия и навигация, 2002, №2 (37), с. 19 — 25.
9. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце. // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №5 С. 17-24.
10. Збруцкий А.В. Влияние поступательной вибрации на динамически настраиваемый гироскоп. — Изв. вузов. Приборостроение, 1980. — № 10. — С. 13—16.

11. Збруцкий А.В. К вопросу о динамической устойчивости гироскопических систем. — Докл. АН СССР, 1981. — № 3. — С. 43—47.
12. Земляков С.Д., Рутковский В.Ю., Павлов Б.В. Структурный синтез самонастраивающейся системы управления. // Автоматика и телемеханика. — 1969. — №8. — С. 53—63.
13. Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. Синтез алгоритмов изменения перестраиваемых коэффициентов в самонастраивающихся системах управления с эталонной моделью. // ДАН СССР. — 1967. — Т. 174, №1. — С. 47—49.
14. Крысько А. В., Ярошенко Т. Ю., Жигалов М. В. и др. Нелинейная динамика вибрационных микромеханических гироскопов. Часть I. обзор исследований // Вестник СГТУ. 2012. №1 С.18-24.
15. Лестев, М. А. К динамике системы автогенерации колебаний микромеханического гироскопа / М. А. Лестев. Восьмая научная сессия: аспирантов ГУАП: Сб. докладов. Т. 1. Технические науки. С.-Пб., ГУАП, 2005, с. 70 72.
16. Лестев, М. А. Влияние нелинейностей подвеса и вибраций основания гна динамику систем автогенерации колебаний микромеханических гироскопов / М. А. Лестев. Гироскопия и навигация, №3 (50), 2006, с. 78.
17. Лысов А.Н. Прикладная теория гироскопов: Учебное пособие/ А.Н. Лысов, Н.Т. Виниченко, А.А. Лысова. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2009. — 254 с.
18. Люблинский Б.С., Фрадков А.Л. Адаптивная стабилизация нелинейных объектов с неявно заданной статической характеристикой. // Автоматика и телемеханика. — 1983. — №4. — С. 126—136.
19. Мартыненко Ю.Г. Тенденции развития современной гироскопии // Соросовский образовательный журнал. №11. 1997. С. 120-127.
20. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
21. Мокров, Е. А. Проблемы и перспективы датчиков ой аппаратуры / Е. А. Мокров. Микросистемная техника, 2003, №9, С. 11—17.

22. Мышляев Ю. И. Метод бискоростного градиента // Известия ТулГУ. Технические науки. — 2011. — Вып. 5. — Ч.1. — С. 168—178.
23. Мышляев Ю.И. Об одном подходе к решению задачи слежения с желаемой спектральной динамикой // Труды ФГУП «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина». Системы и приборы управления. 2016. № 4. С. 5—11.
24. Мышляев Ю. И. Алгоритмы управления линейными объектами в условиях параметрической неопределённости на основе настраиваемого скользящего режима // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2009. — №2. — С. 11—16.
25. Мышляев Ю.И. Финошин А.В. Адаптивное управление одноосным вибрационным гироскопом // Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления. — 2014. — № 1. — С. 78—89.
26. Мышляев Ю. И., Финошин А. В., Тар Яр Мьо. Адаптивное управление одноосным вибрационным гироскопом с интегратором // XII Всероссийское совещание по проблемам управления, Россия, Москва, ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. — 16–19 июня 2014. — С. 2246—2256.
27. Мышляев Ю. И., Финошин А. В., Тар Яр Мьо. Метод скоростного биградиента в задаче управления вибрационным гироскопом // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2015. — Т.16. — №11. — С. 783—792.
28. Мышляев Ю.И., Тар Яр Мьо. Алгоритмы скоростного биградиента с модифицированной эталонной моделью в задаче управления вибрационным гироскопом // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2016. — Т.17. — №1. — С. 47–56.
29. Мышляев Ю.И., Тар Яр Мьо, Пью Чжо Кхаунг. Адаптивное управление линейными двухкаскадными объектами (задача слежения) // Фундаментальные исследования. 2016. № 3–1. С. 37 — 41.
30. Мышляев Ю.И., Тар Яр Мьо. Алгоритмы скоростного биградиента для линейных систем с желаемой спектральной динамикой по выходу конечного каскада // Экономика и менеджмент систем управления. 2016. № 3.1(21). С. 183 — 191.

31. Некрасов Я.А., Моисеев Н.В., Люкшонков Р.Г. и др. Модифицированный Микромеханический Гироскоп // XXIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам (XXIII МК ИНС–2016). — Санкт-Петербург. — 30 мая – 1 июня, 2016. — С. 31—34.
32. Павловский М.А. Теория гироскопов. — К.: Вища школа, 1986. — 304 с.
33. Павловский М.А. Влияние погрешностей изготовления и сборки giro-приборов на их точность. — Изд—во Киев. ун—та. — 1973. — 192 с.
34. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. — М.: Наука, 1980. — 234 с.
35. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. — М.: Машиностроение, 1972. — 260 с.
36. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. — М.: Наука, 1980. — 234 с.
37. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. — М.: Машиностроение, 1972. — 260 с.
38. Пешехонов В. Г. Гироскопы начала XXI века // Четвёртый международный аэрокосмический конгресс IAC'2003. Сборник тезисов. — 18 – 23 августа 2003. — Москва. — С. 466 — 467.
39. Пупков К.А., Егупов Н.Д., Баркин А.И., Зайцев А.В. и др. Методы классической и современной теории автоматического управления. В 5—ти томах. Том 5. Методы современной теории автоматического управления, — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. — 784 с.
40. Тар Яр Мьо. Алгоритм управления одноосным вибрационным гироскопом с динамически изменяемым коэффициентом усиления // Труды ФГУП «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина». Системы и приборы управления. 2016. № 1. С. 59—68.

41. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. —М.: Наука, 1981. — 448 с.
42. Фрадков А.Л. Алгоритмы скоростного градиента в задачах адаптации и управления нелинейными системами. // Проблемы динамики неоднородных систем. — М.: ВНИИСИ. 1985. — С. 46—58.
43. Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. — 1979. — №9. — С. 90—101.
44. Фрадков А.Л. Неявные градиентные алгоритмы адаптации. // V Всесоюз. конф. по управлению в механ. сист. — Казань: КАИ, 1985. — С. 100 — 101.
45. Фрадков А.Л. Интегро-дифференцирующие алгоритмы скоростного градиента. // ДАН АН СССР. — Т. 288, №4 — С. 832–835.
46. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. — М.: Наука, 1990.
47. Acar C. and Shkel A. M. Micro-gyroscopes with dynamic disturbance rejection // International Conference On Modeling and Simulation of Microsystems. — USA. — 1999. — P. 605—608.
48. Andrievsky B. R., Fradkov A. L., Stotsky A. A. Shunt compensation for indirect sliding—mode adaptive control // 13th IFAC World Congress, San Francisco. — 1996. — P. 193—198.
49. Andrievsky B. R., Stotsky A. A., Fradkov A. L. Velocity gradient algorithms in control and adaptation problems: A survey // Automation Remote Control. — 1988. — vol. 12. — P.1533—1564.
50. Astrom K. J, Wittenmark B. Adaptive Control. Addison—Wesley Publishing, 1989.
51. Ayazi F., Najafi K. A HARPSS polysilicon vibrating ring gyroscope // Journal of microelectromechanical systems. 2001. — Vol. 10, № 2. — P. 169 – 178.
52. Barnaby R. E., Chatterton J. B. General theory and operational characteristics of the gyrotron angular rate tachometer // Aeronautical Eng. Review. — 1953. — Vol. 12, no. 11. — P. 31 — 36.

53. Batur C., Sreeramreddy T. and Khasawneh Q. Sliding mode control of a simulated MEMS gyroscope // Proceedings of the 2005 American Control Conference. — 2005. — vol. 2. — P. 4160 — 4165.
54. Chou C., Cheng C. Design of adaptive variable structure controls for perturbed time—varying state delay systems // Journal of the Franklin Institute. — 2001. — vol. 338. — P. 35—46.
55. Chou C., Cheng C. A decentralized model reference adaptive variable structure controller for large—scale time—varying delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2003. — vol. 48(7). — P. 1213—1217.
56. Closkey R., Gibson S., Hui J. System identification of a MEMS gyroscope // ASME. Transactions of Dynamic Systems, Measurement and Control. — 2001. — vol. 123(2). — P. 201—210.
57. Connelly, I. Manufacturing micromachined inertial sensor systems / Connelly I., Barbour N., Brand G. // 4-th St. Petersburg International conf on gyroscopic technology and navigation, May1997, p. 362-370.
58. Dong L., Leland R. The adaptive control system of a MEMS gyroscope with timevarying rotation rate // Proceedings of the 2005 American Control Conference. — 2005. — vol. 5. — P.3592—3597.
59. Fei J. Adaptive sliding mode control with application to a MEMS vibratory gyroscope // Diss. ... PhD. — USA, Akron, 2007. — 168 p.
60. Fei J., Batur C. A novel adaptive sliding mode control for MEMS gyroscope // Proceeding of 47th IEEE Conference on Decision and Control. — 2007. — P. 3573—3578.
61. Fei J., Batur C. Adaptive sliding mode control with slidingmode observer for a microelectromechanical vibratory gyroscope // Proc. IMechE, Part I: J. Systems and Control Engineering. — 2008. — vol. 222. — P. 839 —849.
62. Fei J., Batur C. Robust adaptive control for a MEMS vibratory gyroscope // Int J Adv Manuf Technol. — 2009. — vol. 42 (3). — P. 293—300.
63. Fei J., Batur C. A novel adaptive sliding mode control with application to MEMS gyroscope, ISA Transactions, 2009, vol. 48, No 1, pp. 73—78.

64. Fei J., Ding H. System Dynamics and Adaptive Control for MEMS Gyroscope Sensor // International Journal of ARS. — 2010. — vol. 7. — P. 77–82.
65. Fei J. and Yang Y. System Identification of MEMS Vibratory Gyroscope Sensor // Mathematical Problems in Engineering. — 2011. — vol. 2011. Article ID 829432, 12 pages.
66. Fei J. and Zhou J. Robust adaptive control of MEMS triaxial gyroscope using fuzzy compensator // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. — 2012. — Part B. — vol. 42. — №. 6. — P. 1599—1607.
67. Feng Z., Fan M. Adaptive input estimation methods for improving the bandwidth of microgyroscopes // IEEE Sensors Journal. — 2007. — vol. 7(4), —P. 562—567.
68. Foucault J. B. L. Demonstration physique au mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1851. — Vol. 32. — P. 135 — 138.
69. Fradkov A. L. and Andrievsky B.R. Combined adaptive controller for UAV guidance // European J. of Control. — 2005. — vol. 11 (1). — P. 71—79.
70. Fradkov A. L. Speed—gradient Scheme and its Applications in Adaptive Control // Automation. Remote Control. — 1979. — vol. 40(9). — P.1333—1342.
71. Hsu L., Araujo A. D., Costa R. Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control // IEEE Trans.on Automatic control. — 1994. — vol. 39(1). — P. 4 —21.
72. Hu Q., Ma G. Control of three—axis stabilized flexible spacecraft using variable structure strategies subject to input nonlinearities // Journal of Vibration and Control. — 2006. — vol. 12(6). —P. 659—681.
73. Ioannou P. A., Sun J. Robust Adaptive Control. Upper Saddle River, NJ: Prentice—Hall, 1996.
74. Jagannathan S., Hameed M. Adaptive force—balancing control of MEMS gyroscope with actuator limits // Proceedings of the 2004 American Control Conference. — 2004. — vol. 2. P. 1862—1867.

75. John J. and Vinay T. Novel concept of a single mass adaptively controlled tri-axial angular velocity sensor // *Sensors Journal IEEE*. — 2006. — vol. 6(3). — P. 588—595.
76. Kokotovic P.V., Ioannou P.A. Adaptive Systems with reduced models // *Lecture Notes on Control and Inf. Science*. V. 47/ — Heidelberg: Springer-Verlag, 1983/ — 168p.
77. Kokotovic P.V., Kanellakopoulos I, Mols A.S. Adaptive feedback linearization of nonlinear systems // P.V. Kokotovic (ed.) *Foundations of Adaptive Control*. 1991. Berlin: Springer-Verlag, P. 311 – 346.
78. Lee H., and Utkin V. I. Chattering Suppression Methods in Sliding Mode Control Systems // *Annual Reviews in Control*. — 2007. — vol 31. — № 2. — P. 179—188.
79. Lee T. H., Tan K. K., Lee M. W. A variable structure—augmented adaptive controller for a gyro mirror line of light stabilization platform // *Mechatronics*. — 1998. — vol. 8. P.47—64.
80. Leland R. Adaptive mode tuning for vibrational gyroscopes // *IEEE Trans. On Control System Technology*. — 2003 — vol. 11(2). — P. 242—247.
81. Leland R. Lyapunov based adaptive control of a MEMS gyroscope // *Proceedings of 2002 American Control Conference*. — 2002. — vol. 5. — P.3765—3770.
82. Leland R.; Lipkin Y., Highsmith A. Adaptive oscillator control for a vibrational gyroscope // *Proceedings of 2003 American Control Conference*. — 2003. — vol. 4. — P.3347—3352.
83. Lin F., Chiu S., Shu K. Novel sliding mode controller for synchronous motor drive // *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*. — 1998. — vol. 34(2). — P. 532—541.
84. Man Z., Habibi D. A robust adaptive sliding—mode control for rigid robotic manipulators with arbitrary bounded input disturbance // *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. —1996. — vol.17. — P.371—386.

85. Mestrom R.M.C., Fey R.H.B., Beek van J.T.M. et al. Modelling the dynamics of a M $\ddot{O}$ MC resonator: Simulations and experiments. // Available online at www.sciencedirect.com. Sensors and Actuators A 142. — 2008. — P. 306—315.
86. Myshlyaev Y. I., Finoshin A. V., Tar Yar Myo. Sliding mode with tuning surface control for MEMS vibratory gyroscope // 6th Internat. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — St. Petersburg. — 6–8 October 2014. — P. 360—365.
87. Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V. Sliding mode with tuning surface in problem of synchronization of two–pendulum system motion // 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. University of Caen Basse–Normandie, Caen. — France. — July 3—5, 2013. — P. 221—226.
88. Myshlyaev Y.I., Finoshin A.V., Tar Yar Myo. Speed bi-gradient algorithms for nonlinear cascade systems with the modifeied reference model of the output subsystem // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia, June 1—3, 2016. P. 1 — 4.
89. Narendra K.S., Lin Y.H., Valavani L.S. Stable adaptive controller design. Part II: proof of stability // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1980. — V.25. №3. — P. 440—448.
90. Narendra K.S., Kudva P. Stable adaptive schemes for system identification and control – Part I, II // IEEE Trans. — 1974. — V. SMC — 4, №6. — P. 542—560.
91. Narendra K.S., Valavani L.S. A comparison of Lyapunov's and hyperstability approaches to adaptive control of continues systems // IEEE Trans. Automat. Confr., 1980, AC –25, №2. – P. 243–247.
92. Narendra, K. S., Annaswamy, A. M. Stable Adaptive Systems. Prentice—Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
93. Netzer E., Porat I. A novel vibratory device for angular rate measurement // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. –1995. – Vol. 117. – P. 585–591.

94. Park S. Adaptive control strategies for МЭМС gyroscope, Diss. ... Ph.D. University of California, Berkeley, Calif, USA, 2000.
95. Park S., Horowitz R. Discrete time adaptive control for a MEMS gyroscope // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2005. — vol. 19(6). — P.485—503.
96. Park S., Horowitz R. New adaptive mode of operation for MEMS Gyroscopes // ASME Transaction of Dynamic Systems, Measurement and Control. — 2004. — vol. 126. — P. 800—810.
97. Park S., Horowitz R. and Tan C. W. Dynamics and control of a MEMS angle measuring gyroscope // Journal: SENSORS AND ACTUATORS. — 2008. — P. 56—63.
98. Plestan, F.; Shtessel, Y.; Bregeault, V.; et al., New methodologies for adaptive sliding mode control // International J. of Control. — 2010. — vol. 83 (9). — P. 1907—1919.
99. Pourboghra F., Vlastos G. Model reference adaptive sliding control for linear systems // Computers and Electrical Engineering. — 2002. — vol. 29. — P. 361—374.
100. Ren J.X., Zhang R. Research on Accuracy Improvement Method of MEMS Gyroscope Based on Robust Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control // XXIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам (XXIII МКИНС-2016). — Санкт-Петербург. — 30 мая – 1 июня, 2016. — С. 48—51.
101. Roh Y., Oh J. Sliding mode control with uncertainty adaptation for uncertain input—delay systems // Int. J. Control. — 2000. — vol. 73(13). — P. 1255—1260.
102. Salah M. H., McIntyre M., Dawson D. M., Wagner J. R. Time-varying angular velocity Sensing for a МЭМС Z—Axis Gyroscope // Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. — 2006. — P. 561—567.
103. Sam Y., Osman J. H., Ghani M. R. A class of proportional—integral sliding mode control with application to active suspension system // Systems & Control Letters. — 2004. — vol. 51. — P. 217—224.

104. Song G. and Mukherjee R. A comparative study of conventional nonsmooth timeinvariant and smooth time—varying robust compensator // IEEE Trans. on Control System Technology. — 1998. — vol. 6(4). — P. 571—576.
105. Song G., Cai L., Wang Y. and Longman R. W. A sliding mode based smooth adaptive robust controller for friction compensation // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 1998. — vol. 8. — P.725—739.
106. Stepanenko Y., Cao Y., Su C. Y. Variable structure control of robotic manipulators with PID sliding surfaces // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 1998. — vol. 8(1). — P. 79—90.
107. Su C.Y., Stepanenko Y., Leung T.P. Combined adaptive and variable structure control for constrained robots // Automatica, — 1995. —.vol. 31(3). — P. 483—488.
108. Su C.Y., and Leung T.P. A sliding mode controller with bound—estimation for robot manipulator // IEEE Transactions on Robotics and Automation. — 1993. — vol. 9(2). — P. 208—214.
109. Su C.Y., Leung T.P, Stepanenko Y. Real—time implementation of regressor based sliding mode control scheme for robot manipulators // IEEE Transactions on Industrial Electronics. — 1993. — vol. 40(1). — P. 71—79.
110. Tao G. Adaptive Control Design and Analysis, John Wiley and Sons Inc, London, England, 2003.
111. Utkin V. I. Variable structure systems with sliding modes // IEEE trans. On Automatic Control. — 1977. — vol. 22. — P. 212—222.
112. Utkin V. I., Sliding Modes in Control Optimization, Springer—Verlag, Berlin, 1992.
113. Wang Y. P., Sinha A. Adaptive sliding mode control algorithm for a micro-gravity isolation system // Acta Astronautica. — 1998. —vol. 43(7—8). — P. 377—384.
114. Wheeler G., Su C.Y., Stepanenko Y. A sliding mode controller with improved adaptation laws for the upper bounds on the norm of uncertainties // Automatica. — 1998. — vol. 34(12). — P. 1657—1661.

115. Yan J., Shyu K. and Lin J. Adaptive variable structure control for uncertain chaotic systems containing dead—zone nonlinearity // Journal of Intelligent and Robotic Systems. — 2005. — vol. 25. — P. 347—355.
116. Yan W. and Fei J. Adaptive Control of MEMS Gyroscope Based on Global Terminal Sliding Mode Controller // Mathematical Problems in Engineering. — 2013. — vol. 2013. Article ID 797626, 9 pages.
117. Yoo D. S. and Chung M. J. A variable structure control with simple adaptation laws for upper bounds on the norm of the uncertainties // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1992. — vol. 37(3). — P. 159—165.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

А.1. Доказательство теоремы 2.1

Определим производную по времени от функции Ляпунова (2.27) поэлементно. Вычислим производную по времени от слагаемого $Q_i \triangleq 0.5 \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i$ при $u_i = \sigma_i + u_i^{virt}$ (2.22), где u_i^{virt} определяется из равенства (2.20)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\sigma_i + u_i^{virt}) - \mathbf{A}_{*i} \boldsymbol{\varepsilon}_{*i} \right] = \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{*i} \boldsymbol{\varepsilon}_{*i} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u_i^{virt} \pm u_{i*}^{virt}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_i \right] = \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{A}_{*i} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u_i^{virt} - u_{i*}^{virt}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_i \right] \leq \\ &\leq -\rho_i 0.5 \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_i \boldsymbol{\mu}_i + \delta_i \sigma_i. \end{aligned}$$

Производная от $R(\boldsymbol{\sigma}) = 0.5 \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}$ имеет вид

$$\mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{virt}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}), \quad (\text{П.1})$$

где $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_x \quad \sigma_y)$.

Вычислим производную от последнего слагаемого

$$0.5 \frac{d}{dt} \left\{ (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*) \right\} = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Объединяя слагаемые, получаем

$$\dot{V} \leq -\rho_x Q_x - \rho_y Q_y + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T (\delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\delta} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}),$$

где $\boldsymbol{\delta} \triangleq (\delta_x \quad \delta_y)^T$.

В силу алгоритмов адаптации (2.21), получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}. \quad (\text{П.2})$$

Подставляя управление $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ (2.24) в (П.2) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_0) - \gamma_m \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\sigma}).$$

Положим $\mathbf{v}_* = -\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\tau} - 0,5\rho_R \boldsymbol{\sigma}$, где $\rho_R > 0$. Тогда с учетом условия усиленной псевдоградиентности имеем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*) - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta, \quad \beta > 0, \delta = 1, 2, \dots \quad (\text{П.3})$$

Рассмотрим два случая: $\delta = 1$ и $\delta > 1$.

Пусть $\delta = 1$. С учетом равенства $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{2}\sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}$ (П.3) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*) - \gamma_0 \|\boldsymbol{\sigma}\| \leq \\ &\leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R}, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где $\gamma_m \beta = \tilde{\gamma}_m \beta + \gamma_0$; $\gamma_0 > 0$; $\tilde{\gamma}_0 = \sqrt{2}\gamma_0 > 0$; $\tilde{\gamma}_m$ удовлетворяет равенству $\tilde{\gamma}_m \beta = \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*\|$.

Интегрируя неравенство (П.4) получаем, что при любых ограниченных начальных условиях справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \left\{ -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})} \right\} d\tau \leq V(0) < \infty. \quad (\text{П.5})$$

Из (П.5) следует ограниченность $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|$. Из ограниченности траекторий эталонной модели $\mathbf{q}_m(t)$ и $\dot{\mathbf{q}}_m(t)$ и ограниченности $\boldsymbol{\theta}_*$ следуют ограниченность $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ и $\boldsymbol{\theta}$ соответственно. Из ограниченности $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ и $\boldsymbol{\theta}$ в силу (2.20) следует ограниченность $\mathbf{u}^{virt}$. Из ограниченности $\mathbf{u}^{virt}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ в силу (2.22) следует ограниченность $\mathbf{u}$. Тогда из ограниченности правых частей (2.17) следует ограниченность $\dot{\mathbf{e}}_x$ и $\dot{\mathbf{e}}_y$, и как следствие, $\ddot{\mathbf{q}}$ ограничено. Из анализа правой части уравнения следует ограниченность $\dot{\boldsymbol{\theta}}$. Из ограниченности $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}_m$, $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ следует ограниченность $\boldsymbol{\tau}$. Из ограниченности $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\tau}$ и $\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq C_\eta$ следует ограниченность $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}$. Ограниченность $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ приводит к равномерной непрерывности $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ соответственно. Следовательно, подынтегральная функция в (П.5) равномерно непрерывна. Тогда из леммы

Барбалата следует $Q(\boldsymbol{\varepsilon}) \rightarrow 0, R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Из квадратичного вида $Q(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $R(\boldsymbol{\sigma})$ следует $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \rightarrow 0, \boldsymbol{\sigma}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Из неравенства (П.4) вытекает возможность более быстрой сходимости $R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ по отношению к $Q(\boldsymbol{\varepsilon}) \rightarrow 0$. Рассмотрим вопрос о сходимости к пересечению гиперповерхностей $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$ более подробно. Вновь вернёмся к равенству (П.1). При выбранном в неравенстве (П.4) коэффициенте усиления $\gamma_m \beta$ получаем $\dot{R} \leq -\rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})} \leq -\tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}$. Интегрируя последнее неравенство, получаем $\sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(t))} \leq \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(0))} - \frac{\tilde{\gamma}_0}{2} t$. В левой части неравенства — неотрицательная функция, в правой части — линейно убывающая функция, следовательно, существует момент времени t^* такой, что $R(\boldsymbol{\sigma}(t^*)) = 0$ и справедлива оценка $t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(0))}$. Таким образом в замкнутой системе возникает настраиваемый скользящий режим и $\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv 0$ при $t \geq t^*$. При этом в скользящем режиме справедливы оценки $Q(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \leq Q(\boldsymbol{\varepsilon}(t^*)) - \int_{t^*}^t \rho Q d\tau$ и $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{virt}(t)$ при $t \geq t^*$. Для случая $\delta = 1$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $\delta > 1$. Из неравенства (П.3) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + d \|\boldsymbol{\sigma}\| - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta, \quad (\text{П.6})$$

где $d \triangleq \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*\|$.

Для фиксированного Δ :

$$0 < \Delta < V_0 = Q(\boldsymbol{\varepsilon}(0)) + R(\boldsymbol{\sigma}(0)) + 0,5 \|\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2, \quad \text{положим}$$

$$\bar{\rho}_1(\Delta) = \inf_{Q(\boldsymbol{\varepsilon}) > \Delta} \rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \bar{\rho}_2(\Delta) = \inf_{R(\boldsymbol{\sigma}) > \Delta} \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{d} = \sup_{\Omega_0} d, \quad \text{где}$$

$$\Omega_0 = \cup \left((\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) : Q(\boldsymbol{\varepsilon}) + R(\boldsymbol{\sigma}) \leq V_0 + 0,5 \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 \leq V_0 \right).$$

Тогда из (П.6) получаем $\dot{V} \leq -\bar{\rho}_1(\Delta) - \bar{\rho}_2(\Delta) + \bar{d} \|\boldsymbol{\sigma}\| - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta$.

Максимизируем последние два слагаемых по $\|\sigma\|$, получаем

$$\max_{\|\sigma\|} \left(\bar{d} \|\sigma\| - \gamma_m \beta \|\sigma\|^\delta \right) : \bar{d} - \delta \gamma_m \beta \|\sigma\|^{\delta-1} = 0 \Leftrightarrow \|\sigma\| = \left(\frac{\bar{d}}{\delta \gamma_m \beta} \right)^{\frac{1}{\delta-1}}. \text{ Тогда}$$

$$\dot{V} \leq -\bar{\rho}_1(\Delta) - \bar{\rho}_2(\Delta) + \bar{d} \frac{\delta-1}{\delta} \left(\frac{\bar{d}}{\delta \gamma_m \beta} \right)^{\frac{1}{\delta-1}}. \quad (\text{П.7})$$

В силу (П.7) для достаточно большого $\bar{\gamma}_m$ существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_m$ неравенство $\dot{V} \leq -\varepsilon_0$ будет выполняться, если будут выполняться неравенства

$$\Delta - \varepsilon_1 \leq Q + R \leq V_0, \quad (\text{П.8})$$

где Q, R — значения функционалов в момент времени t .

Левая часть неравенства (П.8) не может выполняться в течение времени, большего, чем V_0/ε_0 . Неравенство $Q + R \leq V_0$ не может нарушиться, т.к. $V \leq V_0$. Поэтому существует такой момент времени $\tau > 0$, что

$$Q + R \leq \Delta - \varepsilon_1 \quad (\text{П.9})$$

и, следовательно, при любом $t > \tau$ множество $G_t = \{s : s < t, Q + R \leq \Delta - \varepsilon_1\}$ непустое. Выберем $\tau_t = \sup G_t$. Функции $\rho_Q Q > 0$, $\rho_R R > 0$ при любых $Q \neq 0$, $R \neq 0$, следовательно $\bar{\rho}_1(\Delta) > 0$, $\bar{\rho}_2(\Delta) > 0$ при любом $\Delta > 0$. Выберем $\Delta = \min\{\Delta_\varepsilon, \Delta_\sigma\}$. В силу (П.9) $Q(\varepsilon) \leq \Delta - \varepsilon_1 < \Delta_\varepsilon$, $R(\sigma) \leq \Delta - \varepsilon_1 < \Delta_\sigma$ при любом $t > \tau_t$. Заметим, что из (П.7) следует, что при $\gamma_m \rightarrow \infty$ последние два слагаемые правой части неравенства (П.6) стремятся к нулю и, как следствие, $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\sigma \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$.

Наконец, ограниченность траекторий $\varepsilon, u, \theta, \sigma$ вытекает из условия $\dot{V} \leq 0$ (на траекториях системы, где не выполняются целевые неравенство (2.15), (2.23), и квадратичной формы функционалов $R(\sigma)$ и $Q(\varepsilon)$). Для случая $\delta > 1$ теорема доказана.

А.2. Доказательство теоремы 2.2

Определим производную по времени от функции Ляпунова (2.50) с учётом равенства (2.44), (2.47)

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \gamma^{-1} \dot{\hat{m}}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{virt}) \leq \\
 &- \rho_x Q_x - \rho_y Q_y + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \{ \delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y \} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \{ \delta_x u_x + \delta_y u_y \} + \\
 &+ (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \gamma^{-1} \dot{\hat{m}}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}) = \\
 &= -\rho Q + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \{ \delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y + \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}} \} + \\
 &+ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \{ \delta_x u_x + \delta_y u_y - \gamma^{-1} \dot{\hat{m}}^{-1} \} + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}).
 \end{aligned}$$

В силу алгоритмов адаптации (2.45), (2.46) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}. \quad (\text{П.10})$$

Подставляя управление $\mathbf{v}$ (2.24) в (П.18) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_0) - \gamma_m \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\sigma}).$$

Положим $\mathbf{v}_* = -\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\tau} - 0,5\rho_R \boldsymbol{\sigma}$, где $\rho_R > 0$. Тогда с учетом условия усиленной псевдоградиентности имеем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*) - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta, \quad \beta > 0, \delta = 1, 2, \dots \quad (\text{П.11})$$

Рассмотрим два случая: $\delta = 1$ и $\delta > 1$.

Пусть $\delta = 1$. С учетом равенства $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{2} \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}$ (П.11) примет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*) - \gamma_0 \|\boldsymbol{\sigma}\| \leq \\
 &\leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R},
 \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

где $\gamma_m \beta = \tilde{\gamma}_m \beta + \gamma_0$; $\gamma_0 > 0$; $\tilde{\gamma}_0 = \sqrt{2} \gamma_0 > 0$; $\tilde{\gamma}_m$ удовлетворяет равенству $\tilde{\gamma}_m \beta = \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*\|$.

Интегрируя неравенство, получаем, что при любых ограниченных начальных условиях справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \left\{ -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})} \right\} d\tau \leq V(0) < \infty. \quad (\text{П.13})$$

Докажем ограниченность траекторий замкнутой системы и равномерную ограниченность подынтегральной функции (П.13). Из (П.13) следует ограниченность $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\hat{m}^{-1}$. Из ограниченности траекторий эталонной модели $\mathbf{q}_m = (x_m \ y_m)^T$, $\dot{\mathbf{q}}_m$, $\boldsymbol{\varepsilon}_*$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*$ следуют ограниченность $\mathbf{q} = (x \ y)^T$, $\dot{\mathbf{q}}$. Из ограниченности $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, $\boldsymbol{\theta}$ и $\hat{m}$ (при $\hat{m}(0) > 0$) силу (2.42) следует ограниченность u_i^{virt} . Из ограниченности u_i^{virt} и σ_i в силу (2.33) следует ограниченность u_x, u_y . Тогда из ограниченности правых частей (2.38) следует ограниченность $\dot{\mathbf{e}}$.

Из ограниченности $\dot{\mathbf{e}}$, с учётом ограниченности $\ddot{\mathbf{q}}_m$, следует ограниченность $\ddot{\mathbf{q}}$. Из анализа правой части уравнения (2.45), (2.46) следует ограниченность $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\dot{\hat{m}}$. Из ограниченности $\dot{\mathbf{q}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{q}_m$, $\dot{\mathbf{q}}_m$, $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{m}$, $\dot{\hat{m}}$ следует ограниченность $\boldsymbol{\tau}$. Из ограниченности $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\tau}$ и $\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq C_\eta$ следует ограниченность $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}$.

Ограниченность $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\mathbf{e}}$ приводит к равномерной непрерывности $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и $\mathbf{e}(t)$ соответственно. Следовательно, подынтегральная функция в (П.13) равномерно непрерывна. Тогда из леммы Барбалата следует $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$, $R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Из квадратичного вида $Q(\mathbf{e})$ и $R(\boldsymbol{\sigma})$ следует $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$, $\boldsymbol{\sigma}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Из неравенства (П.12) вытекает возможность более быстрой сходимости $R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ по отношению к $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$. Рассмотрим вопрос о сходимости к пересечению гиперповерхностей $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$ более подробно. Вновь вернёмся к равенству (2.47). При выбранном в неравенстве (П.12) коэффициенте усиления $\gamma_m \beta$ получаем

$$\dot{R} \leq -\rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})} \leq -\tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$\sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(t))} \leq \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(0))} - \frac{\tilde{\gamma}_0}{2} t$. В левой части неравенства – неотрицательная функция, в правой части – линейно убывающая функция, следовательно, существует момент времени t^* такой, что $R(\boldsymbol{\sigma}(t^*)) = 0$ и справедлива оценка $t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(0))}$. Таким образом, в замкнутой системе возникает настраиваемый скользящий режим и $\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv 0$ при $t \geq t^*$. При этом в скользящем режиме справедливы оценки $Q(\mathbf{e}(t)) \leq Q(\mathbf{e}(t^*)) - \int_{t^*}^t \rho Q d\tau$ и $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{virt}(t)$ при $t \geq t^*$.

Для случая $\delta = 1$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $\delta = 2$. Из неравенства (П.11) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + d \|\boldsymbol{\sigma}\| - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta, \quad (\text{П.14})$$

где $d \triangleq \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*\|$.

Для фиксированного Δ :

$$0 < \Delta < V_0 = Q(\mathbf{e}(0)) + R(\boldsymbol{\sigma}(0)) + 0,5 \|\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + 0,5 \gamma^{-1} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right)^2 \quad \text{по-}$$

ложим $\bar{\rho}_1(\Delta) = \inf_{Q(\mathbf{e}) > \Delta} \rho Q(\mathbf{e})$, $\bar{\rho}_2(\Delta) = \inf_{R(\boldsymbol{\sigma}) > \Delta} \rho_R R(\boldsymbol{\sigma})$, $\bar{d} = \sup_{\Omega_0} d$,

$$\text{где } \Omega_0 = \bigcup \left((\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}) : Q(\mathbf{e}) + R(\boldsymbol{\sigma}) \leq V_0, \quad 0,5 \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + 0,5 \gamma^{-1} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right)^2 \leq V_0 \right).$$

Тогда из (П.15) получаем $\dot{V} \leq -\bar{\rho}_1(\Delta) - \bar{\rho}_2(\Delta) + \bar{d} \|\boldsymbol{\sigma}\| - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta$.

Максимизируя последние два слагаемых по $\|\boldsymbol{\sigma}\|$, получаем

$$\max_{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \left(\bar{d} \|\boldsymbol{\sigma}\| - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta \right) : \bar{d} - \delta \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^{\delta-1} = 0 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{\sigma}\| = \left(\frac{\bar{d}}{\delta \gamma_m \beta} \right)^{\frac{1}{\delta-1}}.$$

Тогда

$$\dot{V} \leq -\bar{\rho}_1(\Delta) - \bar{\rho}_2(\Delta) + \bar{d} \frac{\delta-1}{\delta} \left(\frac{\bar{d}}{\delta \gamma_m \beta} \right)^{\frac{1}{\delta-1}}. \quad (\text{П.15})$$

В силу (П.15) для достаточно большого $\bar{\gamma}_m$ существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_m$ неравенство $\dot{V} \leq -\varepsilon_0$ будет выполняться, если будут выполняться неравенства

$$\Delta - \varepsilon_1 \leq Q + R \leq V_0, \quad (\text{П.16})$$

где Q, R – значения функционалов в момент времени t .

Левая часть неравенства (П.16) не может выполняться в течение времени, большего, чем V_0/ε_0 . Неравенство $Q + R \leq V_0$ не может нарушиться, т.к. $V \leq V_0$. Поэтому существует такой момент времени $\tau > 0$, что

$$Q + R \leq \Delta - \varepsilon_1 \quad (\text{П.17})$$

и, следовательно, при любом $t > \tau$ множество $G_t = \{s : s < t, Q + R \leq \Delta - \varepsilon_1\}$ непустое. Выберем $\tau_t = \sup G_t$. Функции $\rho_Q Q > 0$, $\rho_R R > 0$ при любых $Q \neq 0$, $R \neq 0$, следовательно, $\bar{\rho}_1(\Delta) > 0$, $\bar{\rho}_2(\Delta) > 0$ при любом $\Delta > 0$. Выберем $\Delta = \min\{\Delta_e, \Delta_\sigma\}$. В силу (П.17) $Q(\mathbf{e}) \leq \Delta - \varepsilon_1 < \Delta_e$, $R(\sigma) \leq \Delta - \varepsilon_1 < \Delta_\sigma$ при любом $t > \tau_t$. Заметим, что из (П.15) следует, что при $\gamma_m \rightarrow \infty$ последние два слагаемые правой части неравенства (П.14) стремятся к нулю и, как следствие, $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ ($\sigma \rightarrow 0$, $\mathbf{e} \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$.

Наконец, ограниченность траекторий $\mathbf{e}$, $\mathbf{u}$, θ , $\hat{m}^{-1}$, σ вытекает из условия $\dot{V} < 0$ на траекториях системы, где не выполняются целевые неравенства (2.23), (2.37).

В предельном случае ($\gamma_m \rightarrow \infty$) из неравенства (П.14) следует $\dot{V} \leq -\rho_Q Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\sigma)$ и, как следствие, ограниченность траектории системы и достижение целей управления $R(\sigma) \rightarrow 0$, $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для случая $\delta > 1$ теорема доказана.

А.3. Доказательство теоремы 2.3

Определим производную по времени от функции Ляпунова (2.59) поэлементно с учётом равенства (2.16). Вычислим производную по времени от слагаемого $Q_i \triangleq 0.5 \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i$ при $u_i = \sigma_i + u_i^{virt}$ (2.55), где u_i^{virt} определяется из равенства (2.53)

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\sigma_i + u_i^{virt}) - \mathbf{A}_{*i} \boldsymbol{\varepsilon}_{*i} \right] = \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{*i} \boldsymbol{\varepsilon}_{*i} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u_i^{virt} \pm u_{i*}^{virt}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_i \right] = \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{A}_{*i} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u_i^{virt} - u_{i*}^{virt}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sigma_i \right] \leq \\ &\leq -\rho_i 0,5 \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_i \boldsymbol{\mu}_i + \delta_i \sigma_i. \end{aligned}$$

Производная от $R(\boldsymbol{\sigma}) = 0.5 \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}$ имеет вид

$$\mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{virt}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}),$$

где $\boldsymbol{\tau}^T = (\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\theta}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}_x + \dot{v}_x \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\theta}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}_y + \dot{v}_y)$.

Вычислим производную от четвёртого и пятого слагаемого

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ 0,5 (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*) + 0,5 \gamma^{-1} (\gamma_m - \gamma_m^*)^2 \right\} &= \\ = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \gamma^{-1} (\gamma_m - \gamma_m^*) \dot{\gamma}_m. \end{aligned}$$

Объединяя производные от слагаемых, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho Q(\boldsymbol{\varepsilon}) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \left\{ \delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y + \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}} \right\} + \\ &+ \boldsymbol{\sigma}^T \left\{ \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{v} \right\} + \gamma^{-1} (\gamma_m - \gamma_m^*) \dot{\gamma}_m, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_x \delta_y\}^T$, $\rho = \min\{\rho_x, \rho_y\}$.

Учитывая вид алгоритма адаптации (2.54) и вводя дополнительное обозначение $\mathbf{F} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\eta}$, получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\varepsilon) + \underbrace{\sigma^T \{F + v\}}_M + \gamma^{-1} (\gamma_m - \gamma_m^*) \dot{\gamma}_m, \quad (\text{П.18})$$

Заметим, что вектор F является функцией от переменных $z = \text{col}\{q, \dot{q}, \ddot{q}, q_m, \dot{q}_m, \ddot{q}_m, \theta_i, \dot{\theta}_i\}, i = \overline{1, 7}$, и в силу уравнений (2.9), (2.11), (2.54) локально ограничен по своим аргументам в любой ограниченной области $Z \subset \mathbf{R}^{20}$, т.е.

$$\|F\| \leq F_M \text{ при } z \in Z.$$

Следовательно, существует верхняя граница γ_m^* для коэффициента $\gamma_m(t)$ так, что

$$\gamma_m(t) < \gamma_m^* \quad \forall t \geq 0.$$

Алгоритм изменения коэффициента $\gamma_m(t)$ определяется переменной структурой согласно (2.57), (2.58). В соответствии с этим рассмотрим два случая: $\sigma \neq 0$ и $\sigma = 0$.

При $\sigma \neq 0$ динамика $\gamma_m(t)$ определяется уравнением (2.57). Тогда для двух последних слагаемых (П.18) с учётом алгоритма (2.55) имеем

$$\begin{aligned} M &= \sigma^T F - \sigma^T \gamma_m \cdot \text{sign} \|\sigma\| + \frac{1}{\gamma} (\gamma_m - \gamma_m^*) k_1 \|\sigma\| \leq \\ &\leq F_M \cdot \|\sigma\| - \gamma_m(\sigma) + \frac{1}{\gamma} (\gamma_m - \gamma_m^*) k_1 \|\sigma\| \leq \\ &\leq F_M \|\sigma\| - \gamma_m \|\sigma\| \pm \gamma_m^* \|\sigma\| + \frac{1}{\gamma} (\gamma_m - \gamma_m^*) k_1 \|\sigma\| = \\ &= (F_M - \gamma_m^*) \|\sigma\| + (\gamma_m - \gamma_m^*) \left(-\|\sigma\| + \frac{k_1}{\gamma} \|\sigma\| \right). \end{aligned}$$

Так как существует $\gamma_m^* > 0$ такой, что $\gamma_m - \gamma_m^* < 0$ при любых $t > 0$, получаем

$$M \leq \underbrace{-(\gamma_m^* - F_M)}_{\beta_\sigma} \|\sigma\| - \underbrace{\left(-\|\sigma\| + \frac{k_1}{\gamma} \|\sigma\| \right)}_{\beta_k} |\gamma_m - \gamma_m^*|.$$

Существуют γ_m^* и γ такие, что при $\gamma_m^* > F_M$ и $\gamma < k_1$ обеспечивается $\beta_\sigma > 0$, $\beta_k > 0$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} M &\leq -\beta_\sigma \cdot \sqrt{2} \frac{\|\sigma\|}{\sqrt{2}} - \beta_k \sqrt{2\gamma} \frac{|\gamma_m - \gamma_m^*|}{\sqrt{2\gamma}} \leq \\ &\leq -\min\{\beta_\sigma \sqrt{2}, \beta_k \sqrt{2\gamma}\} \left(\frac{\|\sigma\|}{\sqrt{2}} + \frac{|\gamma_m - \gamma_m^*|}{\sqrt{2\gamma}} \right) \leq \\ &\leq -\beta \sqrt{R(\sigma) + 0,5\gamma^{-1}(\gamma_m - \gamma_m^*)^2}, \end{aligned}$$

где $\beta = \sqrt{2} \min\{\beta_\sigma, \beta_k \sqrt{\gamma}\}$.

Таким образом, имеем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\varepsilon) - \beta \sqrt{R(\sigma) + 0,5\gamma^{-1}(\gamma_m - \gamma_m^*)^2}. \quad (\text{П.19})$$

Интегрируя неравенство (П.19) получаем

$$\int_0^t \left\{ -\rho Q(\varepsilon) - \beta \sqrt{R(\sigma) + 0,5\gamma^{-1}(\gamma_m - \gamma_m^*)^2} \right\} d\tau \leq V(0) < \infty. \quad (\text{П.20})$$

Из (П.20) следует ограниченность $\varepsilon = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \dot{\mathbf{e}}_x \ \dot{\mathbf{e}}_y)^T$, σ , θ , γ_m . Из ограниченности θ , ограниченности траекторий эталонной модели $x_m, \dot{x}_m, y_m, \dot{y}_m, \gamma_m^*$ следуют ограниченность $x, \dot{x}, y, \dot{y}, \gamma_m$ и как следствие ограниченность $\mathbf{u}^{virt}$ и $\mathbf{F}$. Из ограниченности $\mathbf{u}^{virt}$ и σ следует ограниченность $\mathbf{u}$. Из ограниченности, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ следует ограниченность $\dot{\sigma} = \mathbf{F} + \mathbf{v}$. Ограниченность $\dot{\sigma}$ и $\dot{\varepsilon}$ (в силу правых частей уравнений (2.17)) и $\dot{\gamma}_m$ (в силу уравнения (2.57)) приводит к равномерной непрерывности $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t), \gamma_m(t)$ соответственно. Следовательно, подынтегральная функция в (П.19) равномерно непрерывна. Тогда из леммы Барбалата [20] следует что $Q(\varepsilon) \rightarrow 0$, $R(\sigma) \rightarrow 0$, $\gamma_m \rightarrow \gamma_m^*$ при $t \rightarrow \infty$. А из квадратичного вида $Q(\varepsilon)$ и $R(\sigma)$ получаем $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Более того, из анализа устойчи-

ности по вектору σ следует, что траектории системы сходятся за конечное время $t_r \leq \frac{2R(0)^{1/2}}{\beta}$.

Рассмотрим случай $\sigma = 0$. В этом случае, $\gamma_m(t)$ — изменяется согласно уравнениям (2.58).

С точностью до обозначений справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [78]. Для системы $\dot{\sigma} = F - (k_2|\mathbf{n}| + k_3)\text{sign}(\sigma)$ существует скользящий режим при $k_2 \geq \|F\|$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

АКТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ

УТВЕРЖДАЮ

Директор КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана

А.В. Царьков

« 2016 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы

Тар Яр Мьо



Комиссия в составе: председатель – заведующий кафедрой ЭИУЗ - КФ, д.т.н., проф. Корнюшин Ю.П., члены комиссии: к.т.н., доц. Краснощеченко В.И., к.т.н., доц. Макаренков А.М. рассмотрела вопрос о внедрении в учебный процесс результатов диссертационной работы на тему «**Алгоритмы адаптивного управления с желаемой спектральной динамикой**» аспиранта КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана Тар Яр Мьо и составила настоящий акт о том, что результаты кандидатской диссертационной работы в части:

- методики синтеза алгоритмов адаптивного управления, а также семейства синтезированных алгоритмов управления для линейных двухкаскадных систем с желаемой спектральной динамикой конечного каскада с явной и модифицированной эталонной моделью конечного каскада, с адаптацией параметров в дифференциальной и конечной форме, с общим динамически изменяемым коэффициентом усиления (для настраиваемого скользящего режима);
- результатов анализа идентифицирующих свойств синтезированных релейных, гладких, комбинированных алгоритмов адаптивного управления с адаптацией параметров в дифференциальной и конечной форме;
- семейства алгоритмов адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом с явной и модифицированной эталонной моделью, общим динамическим коэффициентом усиления на основе настраиваемого скользящего режима

используются при проведении лекционных, практических и лабораторных занятий на кафедре «Системы автоматического управления» по дисциплинам «Математическое и имитационное моделирование систем управления», «Управление нелинейными колебаниями» для подготовки магистров по направлению 27.04.04 Управление техническими системами и дисциплине «Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими объектами» для подготовки аспирантов по направлению 05.13.01-Системный анализ, управление и обработка информации (промышленность), а также при выполнении студентами научно-исследовательских и квалификационных работ.

Зав. кафедрой ЭИУЗ КФ

д.т.н., проф. Ю.П. Корнюшин

к.т.н., доц. В.И. Краснощеченко

к.т.н., доц. А.М. Макаренков