На правах рукописи

Ионова Ирина Викторовна

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тула 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Мамонов Сергей Станиславович

Официальные оппоненты: **Кушнер Алексей Гурьевич**;
доктор физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор.

Куликов Дмитрий Анатольевич;
кандидат физико-математических наук, доцент
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова», доцент.

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Защита состоится «08» февраля 2017 года в «14.00» часов на заседании диссертационного совета Д 212.271.05 при ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» (300012, г. Тула, проспект им. Ленина, 92, 12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» по адресу: 300012, г. Тула, проспект им. Ленина, 92 и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-212-271-05/ionova-iv/

Автореферат разослан «09» декабря 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.271.05 — Марина Юрьевна Соколова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современном мире большое значение имеют устройства способные автоматически регулировать скорость квазипериодических процессов с целью достижения определенных фазовых соотношений между ними. Примерами таких устройств являются синхронизируемые часы, ускоритель элементарных частиц, синхронные электрические генераторы и двигатели, устройства управляющие ритмом сердечной деятельности, системы глобального позиционирования (GPS). В компьютерных архитектурах системы фазовой синхронизации (СФС) используются для восстановления тактового сигнала, синхронизации данных и синтеза частоты. Принципы СФС также используются в оптических, нейронных сетях и во многом другом.

Техническое решение указанных задач можно реализовать с помощью систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Эти системы представляют собой одну из разновидностей систем синхронизации. В работах В.В. Шахгильдяна, А.А. Ляховкина, М.В. Капранова, В.Н. Кулешова, Г.М. Уткина, Б.И. Шахтарина, Н.С. Жилина, L. Amerio, H. Borner, F.M. Gardner, S.C. Gupta, W.C. Lindsey, G. Nash, F. Tricomi показано, что динамика системы ФАПЧ описывается операторным уравнением.

Система ФАПЧ имеет многофункциональные возможности и используется в современных компьютерах, системах обработки и передачи информации, для частотной модуляции, демодуляции и фильтрации, умножения и преобразования частоты, выделения опорного колебания для когерентного детектирования и многого другого. Система ФАПЧ может находиться в различных состояниях. Рабочим для системы ФАПЧ является режим синхронизации, при котором разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов стремится к постоянному значению, а частота управляемого генератора равна частоте эталонного сигнала.

В настоящее время возрос интерес к асинхронным режимам системы ФАПЧ. Это связано с использованием системы ФАПЧ как генератора модулированных колебаний, устройства передачи информации с применением хаоса, модели нейроноподобного элемента. Асинхронному режиму соответствуют вращательные движения, являющиеся разновидностью моделированных колебаний системы ФАПЧ, для которых разность фаз $\sigma(t)$ эталонного и подстраиваемого генераторов, удовлетворяет соотношению $\sigma(t+T) = \sigma(t) + \Delta$.

Вопросам динамики систем фазовой автоподстройки частоты посвящено значительное число исследований. Наиболее известными в этой области являются работы: Н.Н. Баутина, Е.А. Барбашина, Л.Н. Белюстиной, В.Н. Белых, И.М. Буркина, Э.Д. Витерби, Н.А. Губарь, Н.В. Кузнецова, Г.А. Леонова, А.А. Ляховкина, С.С. Мамонова, В.В. Матросова, В.И. Некоркина, В.А. Табуевой, В.Д. Шалфеева, В.В. Шахгильдяна, Б.И. Шахтарина, I.I. Blekhman, D.E. Fagiuoli, E.J. Kurths, J.K. Hale, S. Lefschetz, H.O.P. Nijmeijer, E. Noldus, M. G. Rosenblum, G.P. Szeg и других авторов.

Математической моделью ФАПЧ является система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, для изучения которой используются методы качественного анализа, описываемые в работах: Н.В. Бутенина, Н.В. Бутенина, Ю.И. Неймарка, Н.А. Фуфаева, В.Г. Веретенникова, Б.П. Демидовича, В.И. Зубова, М.А. Красносельского, Д.А. Куликова, А.Г. Кушнера, Н.А. Магницкого, С.В. Сидорова, И.Г. Малкина, В.В. Немыцкого, В.В. Степанова, В.А. Плисса, А. Пуанкаре, F. Tricomi и других авторов.

Открытыми остаются вопросы нахождения условий существования вращательных циклов, определение областей начальных условий циклов, обнаружение неустойчивых циклов, нахождение условий бифуркаций циклов, изучение сценариев возникновения хаотических колебаний.

Актуальность задач нелинейной динамики систем синхронизации связана с широким распространением в современной радиотехнике и использованием в качестве математических моделей в механике, энергетике, биофизике, экономике.

Цель и задачи работы. Целью диссертации является разработка аналитических и численных методов исследования вращательных циклов для математической модели системы фазовой автоподстройки частоты, которые могут быть использованы при моделировании колебательных процессов.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать новые аналитические методы обнаружения вращательных циклов для математической модели системы ФАПЧ.

2. Разработать численно-аналитические методы нахождения областей существования неустойчивых модуляционных режимов для системы ФАПЧ, а также численно-аналитические методы поиска неустойчивых циклов.

3. С помощью современных компьютерных технологий определить механизмы бифуркации вращательных циклов математической модели системы ФАПЧ с фильтрами второго порядка.

4. Создать комплекс программ, позволяющий реализовать численные методы и алгоритмы поиска модуляционных колебаний системы ФАПЧ.

Методы исследования. В работе использовались методы теории матриц, матричных уравнений, теории устойчивости, второй метод Ляпунова, метод нелокального сведения, методы функционального анализа; при разработке вычислительных алгоритмов использовалась система компьютерной математики Maple.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту. В диссертационной работе получены новые аналитические и численные методы поиска вращательных циклов для математической модели системы фазовой автоподстройки частоты. Научную новизну составляют следующие результаты, выносимые на защиту:

- предложен новый аналитический метод нахождения вращательных циклов для математической модели системы фазовой автоподстройки частоты, позволяющий определить области содержащие циклы.
- на базе системы компьютерной математики Maple разработан комплекс программ для поиска модуляционных колебаний математической модели системы ФАПЧ.
- с помощью разработанных методов и комплекса программ найдены условия существования вращательных режимов системы ФАПЧ.
- на базе системы компьютерной математики Maple разработан комплекс программ для эффективного поиска неустойчивых вращательных циклов системы ФАПЧ с фильтром второго порядка.
- разработан эффективный вычислительный метод с применением компьютерных технологий для анализа сценария бифуркации вращательного цикла математической модели для системы ФАПЧ с фильтрами второго порядка. Определена математическая модель системы ФАПЧ обладающая модулированными колебаниями с широкополосным спектром.

Достоверность полученных результатов. Все положения, выносимые на защиту, математически строго доказаны и подтверждаются численными экспериментами.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы заключается в развитии методов исследования модуляционных колебаний систем ФАПЧ. Результаты диссертационной работы могут быть использованы специалистами в области теории нелинейных колебаний при анализе многомерных моделей динамических систем, а также при анализе и синтезе систем ФАПЧ.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Россия, Тула, 2013, 2014); международной конференции «Колмогоровские чтения –VI. Общие проблемы управления и их приложения» (Россия, Тамбов, 2013); XIX, XX Всероссийских научно-технических конференциях студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании "НИТ 2014 - 2015"» (Россия, Рязань, 2014, 2015); XIX научной конференции по радиофизике, посвященной 70-летию радиофизического факультета (Россия, Нижний Новгород, 2015), Двадцать третей международной конференции « Математика, компьютер, образование» (Россия, Дубна, 2016); международной конференции, посвященной 110-летию Иринарха Петровича Макарова «Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория». (Россия, Рязань, 2016); международной научно-практической конференция «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» (Россия, Рязань, 2016).

Публикации. Основные результаты работы отражены в 17 публикациях, в том числе 8 статей в изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки РФ, 8 публикаций тезисов докладов на конференциях различного уровня, 1 статья в рецензируемом журнале.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на разделы, заключения, списка литературы, включающего 163 наименования, и приложения. Работа изложена на 152 страницах машинного текста и содержит 72 рисунка. Общий объем – 177 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, приведен обзор литературы по изучаемой проблеме, сформулирована цель, поставлены задачи, показана научная новизна и практическая значимость представленной работы.

В первой главе диссертации дан обзор известных методов исследования математической модели системы ФАПЧ.

В разделе 1.1 рассматривается математическая модель системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). В работах Н.С. Жилина, М.В. Капранова, В.Н. Кулешова, А.А. Ляховкина, Г.М. Уткина, В.Д. Шалфеева, В.В. Шахгильдяна, Б.И. Шахтарина показано, что динамика системы ФАПЧ описывается операторным уравнением

$$p\sigma(t) + \Omega_у K(p)F(\sigma(t)) = \Omega_н \,, \tag{1}$$

где $\sigma(t)$ – текущая разность фаз сигналов подстраиваемого и эталонного генераторов, $\Omega_н$ – начальная расстройка частот, $\Omega_у$ – полоса удержания, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, $F(\sigma) - \Delta$ - периодическая характеристика фазового детектора, $K(p)$ – операторный коэффициент передачи фильтра нижних частот. Известно, что в случае дробно-рационального коэффициента передачи фильтра нижних частот $K(p) = \sum_{i=0}^{m} A_i p^{m-i} \Big/ \sum_{j=1}^{n} B_j p^{n-j}$, $m < n$, уравнение (1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \; \dot{\sigma} = c^T x \,, \tag{2}$$

где A – постоянная матрица размерности $n \times n$, «Т» – знак транспонирования, $x, b, c \in R^n$, $\varphi(\sigma) - \Delta$-периодическая функция, имеющая нули на периоде. Система (2) имеет бесконечное число состояний равновесия и определяет пространство состояний математической модели (1). В разделе 1.1 сформулированы основные понятия характеризующие режимы работы системы ФАПЧ, дано понятие вращательного цикла, определяющего нелинейные колебания с угловой модуляцией.

В разделе 1.2 описываются методы исследования систем ФАПЧ предложенные И.М. Буркиным, Г.А. Леоновым, С.С. Мамоновым, В.В. Матросовом, В.Н. Белых, В.И. Некоркиным, В.Д. Шалфеевым.

В разделе 1.3 сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие получить область параметров системы ФАПЧ, при которых существует вращательный цикл.

Теорема 1. Пусть для системы (2) выполнены условия:

1) система матричных уравнений

$$A^T H + HA = L + 2\varepsilon cc^T - 2\alpha H\ ,\ Hb = r\ , \tag{3}$$

при $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$, $\alpha > 0$, $r = c$, $c^T b = -\Gamma < 0$ имеет решение $H = H_1 = H_1^T$, $L = L_1 < 0$, матрица H_1 имеет одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение;

2) система матричных уравнений (3) при $\varepsilon = \varepsilon_2 > 0$, $\alpha > 0$, $r = -c$ имеет решение $H = H_2 = H_2^T > 0$, $L = L_2 < 0$, матрица H_2 является положительно определенной;

3) система уравнений

$$\dot{y} = -\mu y - \varphi(\sigma),\ \dot{\sigma} = y \tag{4}$$

при $\mu = \mu_1 = (\Gamma\varepsilon_1 + \alpha)\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

4) система уравнений (4) при $\mu = \mu_2 = (\alpha - \Gamma\varepsilon_2)\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $F_2(\sigma)$, $0 < F_1(\sigma) < F_2(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$;

5) справедливо неравенство $\alpha(\varepsilon_1\Gamma)^{-1} F_1(\sigma) - F_2(\sigma) \geq 0$ при $\sigma \in (-\infty;+\infty)$.

Тогда система (2) имеет вращательный цикл.

Доказательство теоремы 1 основано на использовании метода нелокального сведения. Получено улучшение имеющихся результатов, которое происходит за счет использования системы матричных уравнений (3) вместо неравенств. В разделе 1.1 предложен алгоритм проверки условий теоремы 1, реализованный с помощью пакета Maple. Для фильтра второго порядка конкретного вида проведен расчет параметров фильтра, определяющих вращательные режимы система ФАПЧ.

В разделе 1.4 доказаны вспомогательные утверждения и теоремы для системы матричных уравнений (3), используемые в диссертации.

В параграфе 1.5 получены результаты, позволяющие обойти условия разрешимости матричных неравенств и использовать линейные формы при построении областей существования вращательных циклов. Рассмотрена система ФАПЧ с фильтром второго порядка изучение, которой сводится к анализу вращательных циклов системы (4). Для системы (4) предложены алгоритмы определения циклов и их характеристик, реализованные в пакете Maple.

Во второй главе диссертации разработаны аналитические методы поиска автомодуляционных режимов системы ФАПЧ.

В параграфе 2.1 модифицируется положительно инвариантное множество, построенное в теореме 1, с использованием форм первого порядка. За счет добавления новых границ, в виде линейных поверхностей, производится улучшение результатов полученных в параграфе 1.3. На рис.1a, 1b показаны сечения инвариантных множеств плоскостью $P = \{(x,\sigma): \sigma = 0\}$. Усложнение вида инвариантного множества с одно стороны позволяет увеличить область параметров для вращательных циклов и уменьшить область начальных условий модуляционных колебаний системы ФАПЧ, а с другой стороны приводит к усложнению проверки условий существования циклов.

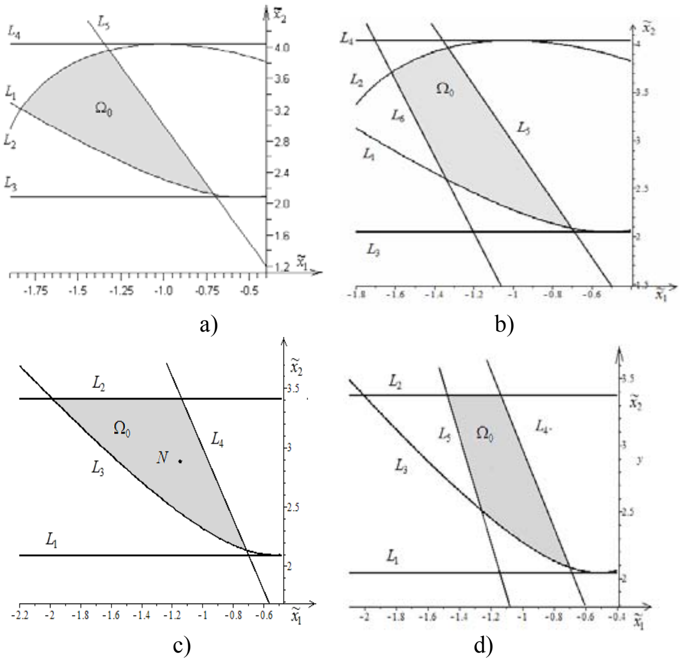


Рис.1. Сечения положительно инвариантных множеств плоскостью $P = \{(x,\sigma): \sigma = 0\}$

Результаты, полученные в §2.1 применимы для случая, когда матрица A системы (2) имеет комплексно сопряженные собственные значения, а система ФАПЧ определяется фильтром с ограниченным затуханием.

В параграфе 2.2 производится модификация положительно инвариантных множеств построенных в разделе 2.1 с использованием линейных поверхностей.

<u>Теорема 2.</u> Пусть для системы (2) выполнены условия:

1) система матричных уравнений

$$A^T H + HA = L + 2\varepsilon cc^T - 2\alpha H,\ Hb = c \tag{5}$$

при $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, $c^T b = -\Gamma$ имеет решение $H = H^T$, $L < 0$, матрица H имеет одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение;

2) $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $rang\|c, l\| = 2$, $l^T b = \nu > 0$;

3) система уравнений (4) при $\mu = \mu_1 = (\Gamma\varepsilon + \alpha)\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $0 < F_1(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$;

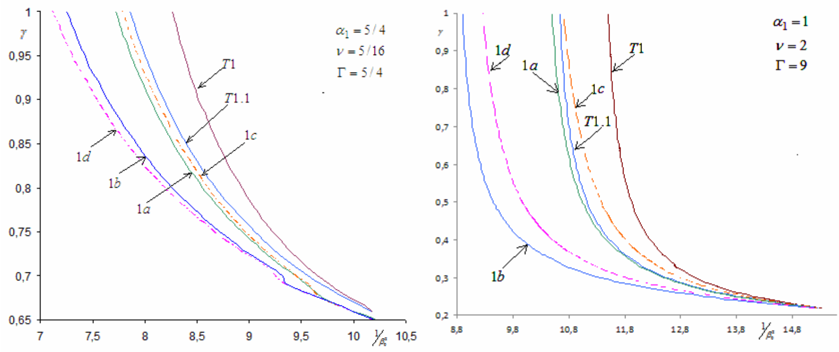
4) справедливо неравенство $-\delta_\lambda = \lambda(\alpha_1 - \lambda) - \beta_1 < 0$ при $\lambda = \nu\Gamma^{-1}$;

5) система (4) при $\mu = \mu_2 < \lambda\Gamma^{-1/2}$ имеет предельный цикл второго рода $0 < F_1(\sigma) < F_2(\sigma)$ для любого $\sigma \in (-\infty; +\infty)$;

6) справедливо неравенство $F_2(\sigma) - \alpha(\varepsilon\Gamma)^{-1} F_1(\sigma) \le 0$ при $\sigma \in (-\infty; +\infty)$.

Тогда система (1.2.1) имеет предельный цикл второго рода.

На рис.1c показано сечение инвариантного множества построенного в теореме 2 плоскостью $P = \{(x, \sigma) : \sigma = 0\}$, а на рис.1d изображено сечение инвариантного множества из теоремы 2 дополнительной поверхностью L_5. Полученное в параграфе 1.4 решение матричных уравнений, позволяет выделить область начальных условий циклов и использовать полученные результаты для дальнейшего численного анализа модулированных режимов системы ФАПЧ.



a) b)

Рис.2. Область параметров вращательных циклов

В параграфах 2.1, 2.2 для проверки условий существования циклов разработаны алгоритмы, реализованные в комплексе программ пакета Maple. На рис.2a, 2b представлены линии правее, которых находятся области существования вращательных циклов. Рис.2a, 2b соответствуют двум системам ФАПЧ с различными фильтрами. Проведенный анализ результатов позволяет сделать вывод о том, что в зависимости от фильтра нижних частот целесообразно использовать различные условия существования циклов.

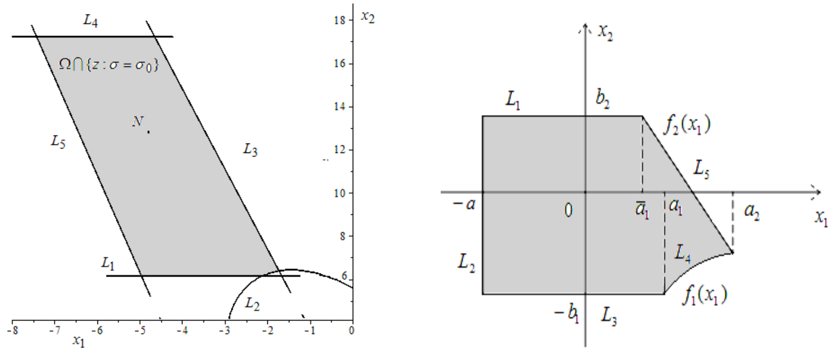
В параграфе 2.3 для системы уравнений (3) с матрицей A, для которой $\lambda_i(A) = -\alpha_i$, $\alpha_i \geq 0$ сформулированы необходимые и достаточные условия его разрешимости и получены решения. Результаты параграфа 2.3 используются в разделе 2.4 при изучении системы ФАПЧ.

В параграфе 2.4 изучается ФАПЧ с неограниченным затуханием фильтра нижних частот, в этом случае матрица A имеет действительные собственные значения. В разделе 2.4 рассматривается положительно инвариантное множество, построенное в теореме 2 с использованием линейных поверхностей и формы второго порядка (рис.1.с). Форма второго порядка строится на базе решения системы матричных уравнений полученного в параграфе 2.3. В разделе предложен алгоритм определения вращательных циклов. Для случая системы ФАПЧ с фильтром второго порядка, определена область начальных условий вращательных циклов. Полученные результаты позволили увеличить верхнюю границу граничной частоты фильтра системы ФАПЧ по сравнению с известными результатами, при этом абсолютная погрешность для граничной частоты уменьшилась на 38%. Положительно инвариантное множество, построенное в параграфе 2.4, является базовым при численном анализе вращательных циклов в разделе 3.2.

В третьей главе разработаны численные методы изучения вращательных циклов с использованием понятия вращения векторного поля.

В параграфе 3.1 построено невыпуклое положительно инвариантное множество с использованием решения системы матричных уравнений полученного в параграфе 2.3 и показано, что в нем содержатся начальные условия цикла второго рода системы (2). В этом случае неприменима теорема Брауэра о неподвижной точке, в разделе 3.1 используется понятие вращение векторного поля для определения неподвижной точки отображения определенного на невыпуклом множестве специального вида.

В §3.1 с помощью функций $V_1(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_1(\sigma)$, $V_2(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma} F_2(\sigma)$, $W_1(z) = l^T x + \varepsilon_1 c^T x$, $W_2(z) = l^T x + \varepsilon_2 c^T x + d_2$, $W_3(z) = x^T D x - F_3^2(\sigma)$, где $c^T b = -\Gamma < 0$, $l^T = c^T A$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $d_2 > 0$, матрица $D = D^T > 0$ является решением уравнений (5), функции $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$, $F_3(\sigma)$ определяются циклами второго рода системы дифференциальных уравнений второго порядка и удовлетворяют неравенствам $F_2(\sigma) > F_3(\sigma) > F_1(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\infty;+\infty)$, строятся множества $\Omega_1 = \{z : V_1(z) \geq 0\}$, $\Omega_2 = \{z : V_2(z) \leq 0\}$, $\Omega_3 = \{z : W_1(z) \leq 0\}$, $\Omega_4 = \{z : W_2(z) \geq 0\}$, $\Omega_5 = \{z : W_3(z) \geq 0\}$, $z = colon(x, \sigma)$. Получены условия на параметры системы (2), при которых множество $\Omega = \Omega_1 \bigcap \Omega_2 \bigcap \Omega_3 \bigcap \Omega_4 \bigcap \Omega_5$ является положительно инвариантным, содержащим вращательный цикл. На рис.3a предложено сечение множества Ω плоскостью $P = \{(x, \sigma) : \sigma = 0\}$. На рис.3b изображено невыпуклое множество, для которого получены условия на границу, обеспечивающие существование неподвижной точки оператора, отображающего множество в себя.



a) b)

Рис.3. Сечение невыпуклого инвариантного множества

В разделе 3.1 рассматривается математическая модель система ФАПЧ с фильтром $K(p) = (A_1 p + A_2)(B_0 p^2 + B_1 p + B_2)^{-1}$, предложен алгоритм определения модуляционных колебаний системы ФАПЧ, реализованный в пакете Maple.

В параграфе 3.2 рассматривается вопрос определения вращательных циклов для системы дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Один из подходов изучения циклов базируется на втором методе Ляпунова. С помощью функций Ляпунова строится положительно инвариантное множество Ω. На сечении Ω_0 множества Ω плоскостью оператор сдвига по траекториям системы дифференциальных уравнений определяет оператор U. Вывод о наличии циклов делается на основе применения теоремы Брауэра о неподвижных точках, одним из условий которой является то, что оператор U отображает множество Ω_0 в себя. В предположении непрерывной зависимости оператора U от параметров системы дифференциальных уравнений естественно ожидать, что при некотором изменении параметров системы, оператор U будет отображать множество Ω_0 в себя, но при этом может произойти потеря положительной инвариантности множества Ω, которая не повлияет на выполнение условий теоремы Брауэра. В связи с этим появляется возможность улучшения имеющихся условии существования циклов основанных на использовании теоремы Брауэра. Возможен случай, когда при фиксированном множестве Ω изменение параметров системы дифференциальных уравнений приводит к тому, что оператор U не отображает множество Ω_0 в себя, не выполняются условия теоремы Брауэра, но при этом множество $\Omega_0 \bigcap U(\Omega_0)$ не является пустым и оператор U имеет неподвижные точки. Если в этом случае для оператора U определить векторное поле $Q(x) = x - U(x)$ на границе $\partial\Omega_0$, то наличие неподвижных точек U связано с $\gamma(Q, \partial\Omega_0)$ - вращением векторного поля Q на границе $\partial\Omega_0$. Взаимосвязь вращения векторного поля с неподвижными точками оператора определяется теоремой из работы М.А. Красносельского: если $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, то оператор U имеет неподвижные точки. При применении указанной теоремы возникают трудности в определении вращения векторного поля. Для решения данной проблемы в работе используются численные методы, на базе которых разработан комплекс программ в системе Maple. В параграфе 3.2 предложен подход последовательного расширения области параметров системы (2) для вращательных циклов. Анализ системы (2) производится с использованием вращения векторного поля и результатов параграфов 1.5, 2.4. На рис.4 показаны множества Ω_0 и $U(\Omega_0)$, для которых $U(\Omega_0) \not\subset \Omega_0$, но вращение $\gamma(Q, \partial\Omega_0) \neq 0$, тогда теореме из работы М.А. Красносельского оператор U имеет неподвижные точки. В параграфе 3.2 предложена схема последовательного приближения к начальным условиям цикла второго рода с удвоенным периодом по переменной σ, изображенная на рис.5.

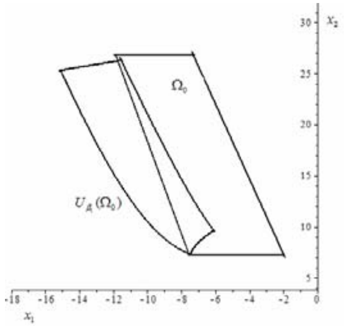


Рис.4 Множества Ω_0 и $U(\Omega_0)$

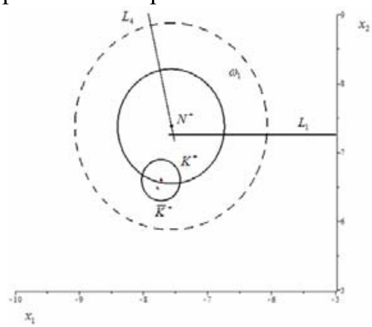
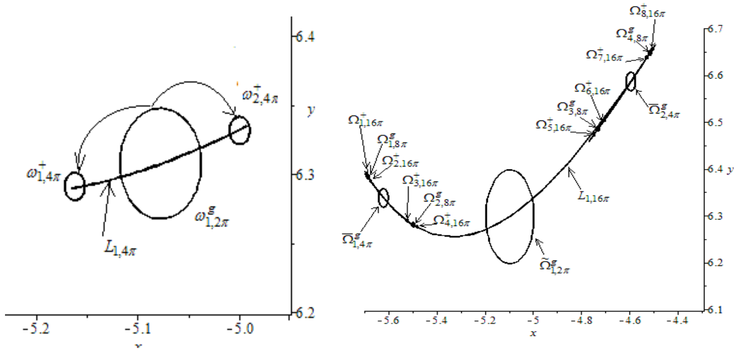


Рис.5 Схема определения начальных условий

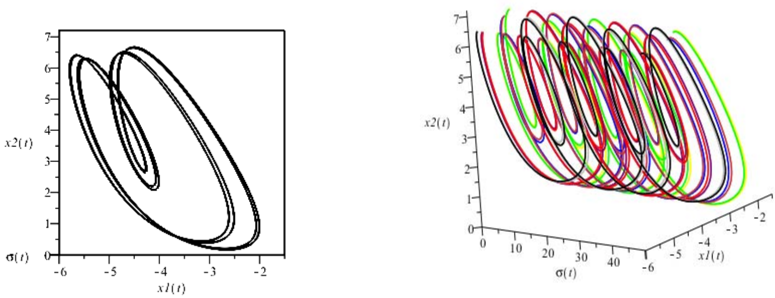
В параграфе 3.3 проводится анализ сценария бифуркации вращательного цикла. Трудности изучение сценариев бифуркаций циклов определяется тем, что в системе дифференциальных уравнений наряду с устойчивыми циклами появляются неустойчивые циклы. В разделе 3.3 разработан численный подход для обнаружения бифуркаций предельных циклов второго рода, с использованием вращения векторного поля. На рис.6a, b представлены схемы сценария бифуркаций вращательных циклов. Увеличение граничной частоты фильтра нижних частот приводит к отделению от устойчивого 2π вращательного цикла двух устойчивых циклов периода 4π, при этом исходный цикл трансформируется в неустойчивый цикл. На рис.6а изображены окрестности начальных условий циклов.



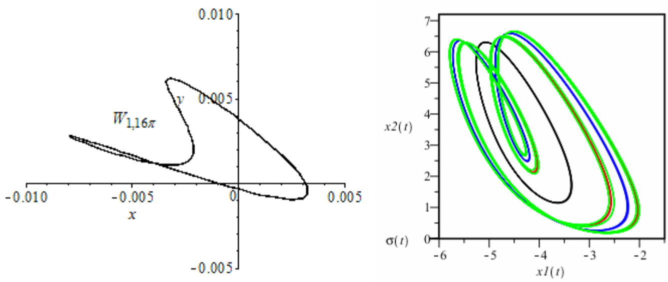
a) b)

Рис.6 Схема бифуркаций вращательных циклов

Дальнейшее увеличение граничной частоты фильтра нижних частот приводит к отделению от двух 4π циклов четырех 8π циклов. На рис.6b изображены окрестности и линия начальных условий 15 циклов.



a) Проекции 8 циклов на плоскость (x_1, x_2) b) Циклы в пространстве (x_1, x_2, σ)



c) Вращение векторного поля d) Проекции 15 циклов на плоскость (x_1, x_2)

Рис.7.

На рис.7a представлены совпадающие проекции восьми вращательных циклов системы (2) на плоскость (x_1, x_2). На рис.7b изображены проекции этих циклов в пространстве (x_1, x_2, σ). На рис.7c показана линия $W_{1,16\pi}$, описываемая вектором $Q_{16\pi}(x)$ при прохождении x окружности $\omega^+_{1,16\pi}$, вращение $\gamma(Q_{16\pi}, \omega^+_{1,16\pi}) = 1$, следовательно, $z^+_{1,16\pi}(t)$ является устойчивым вращательным циклом с периодом 16π по переменной σ. На рис.7d показаны проекции пятнадцати циклов на плоскость (x_1, x_2), восемь из которых являются устойчивыми и семь - неустойчивыми. Дальнейший анализ показывает, что увеличение граничной частоты фильтра системы ФАПЧ приводит к появлению хаотических колебаний в системе ФАПЧ, используемые при передаче информации через радиоканал. Предложенный численный анализ бифуркации вращательного цикла позволяет определить системы ФАПЧ, обладающие пачечными биениями, используемые при моделировании нейроноподобных элементов. Численный подход изучения бифуркаций циклов предложенный в параграфе 3.3 реализован в виде комплекса программ на базе пакета Maple.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложен новый аналитический метод нахождения вращательных циклов для математической модели системы фазовой автоподстройки частоты, позволяющий определить области содержащие циклы.
2. На базе системы компьютерной математики Maple разработан комплекс программ для поиска модуляционных колебаний математической модели системы ФАПЧ.
3. С помощью разработанных методов и комплекса программ найдены условия существования вращательных режимов системы ФАПЧ.
4. На базе системы компьютерной математики Maple разработан комплекс программ для эффективного поиска неустойчивых вращательных циклов системы ФАПЧ с фильтром второго порядка.
5. Проведен анализ сценария бифуркации вращательного цикла математической модели для системы ФАПЧ с фильтрами второго порядка.

Практическая значимость работы состоит в возможности применения полученных результатов к исследованию нелинейной динамики систем ФАПЧ. Рассмотренные в работе методы могут быть применены при анализе конкретных задач механики, биологии, химии, экономике, математическими моделями которых являются системы дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством.

Публикации автора по теме диссертации:

1. **Ионова И.В. Угловая модуляция в системе фазовой автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Ионова И.В., Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 1 (43). С. 39-44.2**
2. **Ионова И.В. Автомодуляционные колебания системы автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Ионова И.В., Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2600-2602.**
3. **Ионова И.В. Существование циклов второго рода системы фазовой автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Ионова И.В., Вестник РАЕН. 2013. № 4. С. 45-50.**
4. **Ионова И.В. Исследование биений поисковой системы фазовой автоподстройки частоты // Мамонов С.С., Ионова И.В., Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 48. С. 52-59.**
5. **Ионова И.В. Применение вращения векторного поля для определения циклов второго рода // Мамонов С.С., Ионова И.В., Вестник РАЕН. 2014. № 5. С. 46-54.**
6. **Ионова И.В. Численно-аналитический подход построения области начальных условий циклов второго рода // Вестник РАЕН. 2015. № 3. С. 49-55.**
7. **Ионова И.В. Анализ бифуркаций циклов второго рода // Мамонов С.С., Ионова И.В., Вестник РАЕН. 2015. № 3. С. 92-96.**
8. **Ионова И.В. Решение системы матричных уравнений при наличии линейной связи // Мамонов С.С., Ионова И.В., Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 2. С. 90-102.**
9. Ионова И.В., Мамонов С.С. Нелинейные колебания фазовой системы третьего порядка // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики», посвященной 90-летию со дня рождения профессора Л.А. Толоконникова. Тула, 2013. С. 63-64.
10. Ионова И.В. Анализ условий существования предельных циклов с использованием вращения векторного поля // Мамонов С.С., Ионова И.В., Материалы международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула, 2014. С. 64-66.
11. Ионова И.В. Численные методы в определении вращения векторных полей при анализе радиотехнических моделей //Материалы XIX Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании "НИТ 2014"». Рязань, 2014. С. 59-60.

12. Ионова И.В. Вращение векторных полей при анализе системы ФАПЧ //Материалы XX Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях». Рязанский государственный радиотехнический университет. Рязань, 2015. С. 91-92.
13. Ионова И.В. Мамонов С.С. Биение поисковой системы фазовой автоподстройки частоты //Труды XIX научной конференции по радиофизике, посвященной 70-летию радиофизического факультета. Нижний Новгород, 2015.С. 90-91.
14. Ионова И.В., Мамонов С.С. Исследование асинхронных режимов системы ФАПЧ // Материалы двадцать третей международной конференции « Математика, компьютер, образование». Дубна, 2016. С. 204.
15. Ионова И.В Расширение класса инвариантных множеств, содержащих предельные циклы второго рода // Мамонов С.С., Ионова И.В., Международная научно-практическая конференция «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования». Рязань: РГУ имени С.А. Есенина, 2016. С. 139-144.
16. Ионова И.В. Бифуркация циклов второго рода фазовых систем // Вестник РАЕН. 2016. №3. С. 20-27.
17. Ионова И.В. Анализ бифуркаций и устойчивости циклов второго рода //Тезисы докладов Междунар конф., посвященной 110-летию Иринарха Петровича Макарова «Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория». РГУ имени С.А. Есенина. Рязань, 2016. С. 18-19.

Подписано в печать 02.11.2016.
Формат бумаги 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 1,2. Уч.-изд. л. 0,8.
Тираж 100 экз. Заказ № 251.

Тульский государственный университет.
300012, г. Тула, просп. Ленина, 92.

Отпечатано в Издательстве ТулГу.
300012, г. Тула, просп. Ленина, 97а.